

**MODELO DE GRAVEDAD MODIFICADA PARA LA ENERGÍA  
OSCURA**

**DARWIN FRANCISCO CASTRO RODRÍGUEZ**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA  
2013**

---

# **MODELO DE GRAVEDAD MODIFICADA PARA LA ENERGÍA OSCURA**

**DARWIN FRANCISCO CASTRO RODRÍGUEZ**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Físico

Director  
**LUIS NORBERTO GRANDA**  
Ph. D.

UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA  
SANTIAGO DE CALI  
2013

---

UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA

**DARWIN FRANCISCO CASTRO RODRÍGUEZ**

**MODELO DE GRAVEDAD MODIFICADA PARA LA ENERGÍA  
OSCURA**

Temas

- Cosmología
- Energía Oscura
- Gravedad Modificada
- Sistema Dinámico

*a Dios y mis padres...*

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero agradecer principalmente a Dios. A mis padres quienes me ayudaron en todo este proceso. Muchas gracias al profesor Norberto Granda por la aceptación en el grupo de estudio y la orientación, gracias por ser el director de mi tesis. A la Universidad del Valle, a mis amigos y amigas especialmente a Stefani Dorado y Lauren Flor, a los profesores, al departamento y todos aquellos que hicieron posible que este trabajo llegara a buen término.

*El cosmos habla de la grandeza del Señor,  
El universo y lo creado lo confirma,  
Un planeta a otro le pasa el mensaje,  
Una galaxia a otra se lo transmite,  
Con un lenguaje inaudible...*

*Desde 10 hertz hasta  $10^{25}$  hertz,  
Alcanza su luz, Nada se libra de él;  
Él asoma a 13,500 millones de años luz,  
Hasta el otro extremo llega su pregón.*

*Su voz se propaga en todas las direcciones  
Hacia donde va un universo en expansión;  
Él muestra su poder desde la explosión de una supernova,  
Hasta el enfriamiento de las estrellas...*

*Aléjame de la arrogancia para que no me domine,  
que mi más íntimo pensamiento llegue a ti,  
que te agraden mis formulas  
y las palabras de mi boca...*

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Elementos de Relatividad General</b>	<b>5</b>
2.1	Principios de Relatividad General . . . . .	5
2.2	Formulación Matemática de la Relatividad General . . . . .	6
2.3	Principio Variacional de la Relatividad General . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Modelo Cosmológico Estándar</b>	<b>11</b>
3.1	La Métrica de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker y la Expansión del Universo . . . . .	11
3.2	Ecuaciones de Evolución . . . . .	12
3.3	Distancia en el Modelo Estándar . . . . .	14
3.3.1	Redshift . . . . .	15
3.3.2	Distancia de luminosidad $d_L(z)$ . . . . .	16
3.4	Dinámica de la Energía Oscura . . . . .	17
3.4.1	Evidencia Observacional de Supernovas tipo Ia . . . . .	17
3.4.2	Edad del Universo . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Ecuaciones de Campo en Teoría <math>F(R)</math></b>	<b>19</b>
4.1	Ecuaciones de Campo en el Formalismo Métrico . . . . .	20
4.2	Modelos Cosmológicos en Teorías $F(R)$ . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Dinámica de la Energía Oscura en <math>F(R)</math></b>	<b>26</b>
5.1	Aproximaciones de Sistema Dinámico en $f(R)$ . . . . .	26
5.2	Estabilidad de los puntos críticos . . . . .	29
5.3	Algunos Modelos Específicos . . . . .	33
5.4	Modelo Propuesto para la Energía Oscura . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>A</b>	<b>Evaluación del Término <math>g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - g^{\sigma\mu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)</math></b>	<b>42</b>
<b>B</b>	<b>Descripción de los Términos <math>M_\tau</math> y <math>N^\sigma</math></b>	<b>44</b>
<b>C</b>	<b>Estabilidad en el Sistema Dinámico</b>	<b>45</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>

## Resumen

El fenómeno de la Energía Oscura es uno de los problemas más interesantes de la física moderna [3, 4, 8, 15]. Para su explicación se han propuesto diferentes teorías, entre ellas está el estudio de la gravedad modificada  $F(R)$  la cual es una alternativa interesante. Motivado en este enfoque se realizó un estudio de los modelos cosmológicos  $F(R)$ , los cuales son extensiones naturales de la Relatividad General (RG) con funciones arbitrarias del escalar de Ricci.

Se encontraron condiciones para el modelo propuesto por el profesor Norberto Granda, de tal forma que cumplieron con las exigencias que se dieron en cada uno de los capítulos; es decir, se hallaron soluciones que dan lugar a expansión acelerada en tiempos tardíos y una posible unificación en la época de materia con la consiguiente transición a la fase de expansión acelerada.



## Notación y convenciones

La convención de los signos usados para la métrica es  $(-, +, +, +)$  la velocidad de la luz será tomada en unidades geometrizadas  $c = 1$ , los índices griegos  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  se utilizan para coordenadas espacio-temporales y van de 0 a 3, los índices latinos  $a, b, c, \dots$  se utilizan para las coordenadas espaciales y van de 1 a 3. Las letras en negrilla y mayúsculas son usadas para los tensores  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$  y las que están en negrilla pero en minúsculas  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$  son para denotar los vectores.

$G$	Constante de Gravitación universal
$\kappa$	$8\pi G$
$g_{\mu\nu}$	Componentes del tensor métrico
$g$	Determinante del tensor métrico
$R_{\mu\nu\alpha\beta}$	Tensor de Riemann
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$R$	Escalar de Ricci
$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$	Símbolo de Christoffel
$G_{\beta\gamma}$	Tensor de Einstein
$\partial_{\mu}$	Derivada con respecto a $x^{\mu}$
$\nabla_{\mu}$	Derivada covariante
$\square$	d'Alambertiano $\square = \nabla_{\mu}\nabla^{\mu}$
$T_{\mu\nu}$	Tensor de Energía-Impulso
$S_{[\mu,\nu]}^{\eta}$	antisimetrización
$a(t)$	Factor de escala
$z$	Redshift
$H$	Parámetro de Hubble
$\rho$	Densidad de energía
$p$	Presión
$\omega$	Ecuación de estado $\omega = p/\rho$
$\Lambda$	Constante cosmológica
$d_L$	Distancia de luminosidad
$F(R)$	$R + f(R)$

# CAPÍTULO 1

## 1. Introducción

Con el fin de tener un universo estático, Einstein intentó conciliar el modelo dinámico introduciendo la *Constante Cosmológica*  $\Lambda$  en sus ecuaciones originales. Sin embargo Friedmann al resolver dichas ecuaciones en 1922 y Lemaitre en 1927 encontraron que este universo era inestable y que a pesar de estar en equilibrio, cualquier perturbación podía hacerlo implosionar o expandirse de nuevo. No obstante, las observaciones realizadas por Hubble el 1929 mostraron que las galaxias se alejaban más rápido mientras más lejos estuvieran, mostrando así la expansión y corroborando las hipótesis de Friedmann y Lemaitre. Así pues, la comunidad científica fue adoptando cada vez más la idea de un universo dinámico. Einstein consideró entonces la introducción de dicha constante como el error más grande de su vida, pero permaneció como un problema de interés teórico.

Durante casi todo el siglo XX se pensó que el universo se expandía como consecuencia del Big Bang hace aproximadamente 13,700 millones de años; en la actualidad se sabe que además de expandirse se está acelerando.

El premio Nobel de Física, del año 2011 fue otorgado por uno de los más sorprendentes descubrimientos de la ciencia moderna; en el cual, se utilizaron un tipo especial de supernovas denominadas tipo Ia (SN Ia) [1, 2, 3, 4], las cuales son estrellas antiguas y compactas; pesadas como el sol, pero pequeñas como la tierra y emiten luz como una galaxia completa. En esta investigación, los científicos: Saul Perlmutter (jefe del Supernova Cosmology Project) [1], Brian Schmidt (jefe del High-z Supernova Search Team) y Adam Riess (profesor del Space Telescope Science Institute de Baltimore)[2] encontraron más de 50 supernovas cuya luz era más débil de lo esperado; dichas mediciones, basadas en el alto corrimiento al rojo que experimentan las (SN Ia)<sup>1</sup>, fueron

---

<sup>1</sup>Según la ley de Hubble, todas las galaxias lejanas se alejan de un punto de observación mostrando

interpretados como una señal de la expansión acelerada del universo.

Aparte de las observaciones realizadas a las (SN Ia), hay diversas fuentes independientes que comprueban este fenómeno; entre ellas se encuentra el grado de anisotropía presente en la radiación cósmica de fondo [4, 5, 6], que predice el contenido material del universo compuesto por un 74 % de *Energía Oscura* que ocasiona la expansión y de la cual no se conoce su naturaleza, y un restante 26 % de materia, compuesta en un 22 % por *Materia Oscura* que interacciona como lente gravitacional rodeando las galaxias y un 4 % restante en materia bariónica [4, 8] de la cual está constituida toda la materia observable.

La denominada Energía Oscura<sup>2</sup>, de cualquier forma, es necesaria para reconciliar la geometría medida del espacio con la suma total de la materia del universo [16]. Este fenómeno está presente en todo el universo, produciendo una presión que acelera la expansión del mismo y resultando así una fuerza gravitacional repulsiva [7].

En el modelo estándar de la cosmología, este fenómeno aporta casi tres cuartas partes de la masa-energía del universo [4, 7, 8]. Dicha energía sigue siendo considerada como uno de los problemas fundamentales del siglo XXI y para la explicación de esto han surgido diferentes modelos.

- La Constante Cosmológica [8, 9], una densidad de energía constante que llena el espacio en forma homogénea, dando lugar a una ecuación de estado  $\omega = -1$ . Ésta se ajusta muy bien a los datos experimentales disponibles, ya que las observaciones realizadas por el WMAP [5] arrojan un resultado del orden de los  $10^{-3}eV^4$ . Sin embargo, cuando se calcula dicha cantidad en la teoría cuántica de campos (TCC), discrepa en varios ordenes de magnitud al valor encontrado por las observaciones astronómicas, excediendo del orden de los  $GeV^4$  [8], denominando esta discrepancia como *la peor predicción de la historia*. Cabe resaltar que este modelo es capaz de explicar la radiación cósmica de fondo de forma coherente.
- Los modelos de Quintessencia [8] son campos escalares con un potencial efectivo y corresponden a un fluido con una ecuación de estado  $0 > \omega > -1$ . Estos campos se acoplan minimamente a la gravedad con un potencial asociado a la época inflacionaria. En contraste con éstos existen otros potenciales de energía y de campos escalares implicados en la aceleración del universo. Al modificar la energía cinética del campo escalar podría ocasionar una  $\mathcal{K}$ -inflación para explicar las grandes variaciones de energías durante el periodo inflacionario, al extender este modelo surge un nuevo escenario llamado  $\mathcal{K}$ -*essencia* el cual es caracterizado por campos escalares asociados a energías cinéticas generales.

---

un desplazamiento al rojo debido al efecto Doppler. Cuando una estrella se vuelve inestable ante fugas termonucleares, explota con un brillo característico; el brillo observado de éstas se pinta frente a su corrimiento al rojo y esto se utiliza para medir la historia de la expansión.

<sup>2</sup>Se le llama de esta forma porque no corresponde ni a materia bariónica ni a materia oscura.

- En conjunto con los modelos de Quintessencia se ha sugerido que los condensados de Tachyon (campo presente en la teoría de cuerdas), pueden tener interesantes consecuencias cosmológicas, observando el decaimiento de  $\mathcal{D}$ -branas que produce un gas sin presión con densidad finita de energía que se asemeja al polvo clásico. En contraste con este modelo, para una ecuación de estado  $\omega < -1$  hay una fase llamada Phantom en la cual la densidad es homogénea en el universo y conlleva a la creación de nueva materia a causa de la expansión del universo [8].
- Otra explicación está en un fluido conocido como el Gas de Chaplygin [8, 12]; este modelo reproduce asintóticamente dos eras del universo, es decir la época de dominancia de la materia y la época de expansión acelerada.
- Hasta el momento, el modelo  $\Lambda$ CDM ( $\Lambda$  Could Dark Matter) [8, 9] es uno de los más acertados, ya que muestra la concordancia entre el Big Bang, la radiación cósmica de fondo, la construcción de súper estructuras, y la expansión acelerada. Sin embargo es sólo uno de los modelos y como tal tiene ciertas falencias ya que no dice nada sobre el origen físico fundamental de la materia oscura y de la energía oscura [19].
- La gravedad modificada constituye uno de los modelos dinámicos más interesantes alternativos al modelo  $\Lambda$ CDM. Este modelo describe la aceleración del universo observando los términos adicionales en las ecuaciones de campo de Einstein responsables de la expansión o modificación de la gravedad. Esta formulación es llamada *teoría  $F(R)$  de gravedad modificada* que surge de la generalización en la acción de Einstein-Hilbert con términos adicionales al escalar de curvatura  $R$  [13, 14, 15, 18, 19, 20, 21]. Existen tres formulaciones de las teorías  $F(R)$ : el formalismo métrico, el formalismo de Paladini y el formalismo Métrico Afín, los cuales se diferencian básicamente en las dependencias de los campos de materia con el tensor métrico y las conexiones.

Debido a que las teorías  $F(R)$  se pueden ver como extensiones de la Relatividad General, deben producir los mismos resultados de ésta al menos a nivel local (por ejemplo tener los límites Newtonianos correctos a nivel del sistema solar), pero a dichos niveles muchos modelos presentan inestabilidades.

Todos estos modelos [8, 9, 10, 11, 12], han logrado mostrar fácilmente satisfacer las condiciones para la energía oscura, ya que como campos dinámicos su densidad de energía puede variar en el tiempo y el espacio; no obstante diversos modelos adolecen de varias dificultades, entre ellas cabe nombrar la singularidad en un tiempo finito.

En el presente trabajo se muestra la evolución de la Relatividad General hasta llegar al formalismo de gravedad modificada  $F(R)$ . Los respectivos capítulos están divididos de la siguiente forma:

El capítulo dos está dedicado a los principios fundamentales de la Relatividad General, haciendo un estudio detallado de los resultados obtenidos por Einstein y Hilbert fundamentalmente; en particular se obtiene obteniendo las ecuaciones que rigen la dinámica del universo. El tercer capítulo describe de forma general las soluciones de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW), las ecuaciones dinámicas de Friedmann y las pruebas experimentales para la existencia de la energía oscura. En el cuarto capítulo se obtuvieron las ecuaciones de campo para el formalismo  $F(R)$  sin incluir el término de frontera (Gibbons-York-Hawking); se aplican tales resultados al modelo estándar de la cosmología en la métrica de Friedman-Lemaitre usando el espacio-tiempo de Robertson-walker (FLRW) [7, 15, 16]. Se dedica el capítulo quinto a la dinámica de la energía oscura haciendo uso del sistema dinámico con el cual se dieron criterios más sólidos para la viabilidad de las funciones  $f(R)$ . Para los modelos específicos dados en este capítulo se les exigió la condición para que haya transición de época de materia hasta expansión acelerada.

Finalizando este capítulo se propone el modelo del profesor Norberto Granda, el cual toma la forma:

$$R + \frac{\alpha R + \beta}{\gamma R + \delta},$$

y Al cual se le aplican los tratamientos vistos en los capítulos cuarto y quinto.

El propósito de este trabajo es estudiar el modelo  $F(R)$  de gravedad modificada, plantear las ecuaciones fundamentales de movimiento, encontrar la función  $m(r)$  para algunos modelos  $F(R)$ , y el modelo específico del profesor Norberto Granda, apoyado en [8, 15, 17, 21, 22, 23].

# CAPÍTULO 2

## 2. Elementos de Relatividad General

La Relatividad General (RG) es la teoría de gravedad más aceptada actualmente; ésta explica los fenómenos gravitacionales como consecuencia de la curvatura en el espacio-tiempo generada por la materia presente. Aunque la RG cuenta con un fundamento observacional que la hace una de las teorías más sólidas en física, la relación con la teoría cuántica sigue siendo aún desconocida.

### 2.1. Principios de Relatividad General

La gravedad fue descrita por Newton como una fuerza que actúa a distancia y depende de las masas de los objetos; ésto permitió explicar el movimiento de los astros en el sistema solar (sin contar la anomalía en la órbita de Mercurio) y la caída de los cuerpos. Pero presentaba algunas fallas, en especial la imposibilidad de explicar el origen de aquella fuerza de interacción inherente a todos los cuerpos con masa.

La teoría Newtoniana basa sus leyes en la existencia de sistemas de referencias inerciales, teniendo un gran problema cuando la fuerza de atracción es considerada, pues presupone una interacción a distancia con una velocidad infinita. Esto llevó a Einstein a formular la Teoría de la Relatividad Especial (RE) basada en los siguientes postulados [16]:

1. *Las leyes de la física son independientes del sistema de referencia inercial.*
2. *la velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores inerciales, independiente de la dirección de propagación.*

El carácter fundamental se basa entonces en la constancia de la velocidad de la luz, razón por la cual la teoría gravitacional de Newton debía ser reformulada. Una de las bases fundamentales en la teoría de Einstein es el denominado *Principio de Equivalencia*, formulado como:

*No es posible determinar bajo ningún experimento si un objeto se encuentra en caída libre en un campo gravitacional uniforme  $g$  o si está en un movimiento uniformemente acelerado con aceleración  $a = g$ ,*

donde  $g$  es la aceleración del campo gravitacional. La idea de Einstein fue entonces ver la trayectoria de partículas en caída libre y ver a qué efecto se debe a su aceleración. El cambio fundamental es el de transformar el concepto de fuerza de atracción al de deformación (o mejor *curvatura*) del espacio-tiempo, y así una partícula no experimenta una aceleración por la fuerza, sino que recorre una trayectoria en geodésicas en un espacio-tiempo curvo. El ente que realiza esta curvatura en el espacio-tiempo es cualquier forma de materia-energía, de modo que: *La curvatura le dice a la materia como moverse, pero la materia le dice al espacio como curvarse* véase [16].

## 2.2. Formulación Matemática de la Relatividad General

**Postulado 1:** *El espacio-tiempo está descrito por un par  $(\Psi, g)$ , donde  $\Psi$  es una variedad 4-dimensional y  $g$  una métrica Lorentziana sobre  $\Psi$ .*

La curvatura en la variedad está descrita por el tensor de Riemman  $R^\lambda_{\mu\rho\nu}$ , el cual es escrito de la siguiente manera:

$$R^\lambda_{\mu\rho\nu} = -\Gamma^\lambda_{\mu\rho,\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^\eta_{\mu\rho}\Gamma^\lambda_{\nu\eta} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\eta} \quad (2.1)$$

donde

$$\Gamma^\eta_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\eta\nu}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu})$$

es el símbolo de Christoffel, y  $g_{\mu\nu}$  son las componentes del tensor métrico.

**Teorema 2.2.1.** (Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana) *En una variedad  $(\Psi, g)$  existe una única conexión simétrica  $\Gamma^\eta_{\mu\lambda}$  que es compatible con la métrica  $g$  y es llamada la conexión de Levi-Civita.*

Es necesario exigir que el tensor de torsión de Cartan  $S^\eta_{\mu\lambda}$  sea nulo, es decir:

$$S^\eta_{\mu\lambda} \equiv \Gamma^\eta_{[\mu\lambda]} = 0 \quad (2.2)$$

y la relación entre  $\Gamma^\eta_{\mu\lambda}$  y la métrica  $g$  se obtiene imponiendo que:

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.3)$$

con la definición usual para la derivada covariante<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Véase [16]

**Postulado 2:** (Conservación Local de la Energía) *existe un tensor simétrico  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$  que es función de los campos de materia  $\phi$  y sus derivadas tal que:*

1.  $T_{\mu\nu} = 0$  sobre  $\wp \subset \Psi$  sii  $\phi_i = 0$  para todo  $i$  sobre  $\wp$
2.  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$

**Postulado 3:** *La métrica sobre la variedad espacio-tiempo  $(\Psi, g)$  está determinada por las ecuaciones de campo de Einstein*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

siendo  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  el escalar de curvatura,  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$  el tensor de Ricci,  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momentum y  $k = 8\pi G$ , donde  $G$  es la constante de gravedad universal usando las unidades en que  $c = 1$ .

Si se define el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

se observa así que el tensor de Einstein es consistente con la restricción geométrica de la forma

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0 \quad (2.6)$$

conocida como la *Identidad de Bianchi*.

El movimiento de una partícula está descrito por su trayectoria en el espacio-tiempo,  $x^\alpha(\gamma)$ , donde  $\gamma$  es un parámetro; aquella partícula sobre la que no se ejerce fuerza alguna satisface la ecuación de geodésica:

$$V^\mu \nabla_\mu V^\nu = 0 \quad (2.7)$$

donde  $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\gamma}$  es el vector tangente a la trayectoria. Esta ecuación puede ser escrita de la forma conocida

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\gamma^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\gamma} \frac{dx^\beta}{d\gamma} = 0 \quad (2.8)$$

cuya expresión aplica para los siguientes casos:

- Partícula con masa, en cuyo caso usualmente se toma el parámetro  $\gamma$  como el tiempo propio tal que el vector tangente está normalizado  $g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = -1$ .
- Partículas sin masa (*fotón*), en cuyo caso el vector tangente, usualmente denotado por  $\kappa^\mu$ , es nulo y  $g_{\mu\nu}\kappa^\mu \kappa^\nu = 0$



En fin las ecuaciones de Einstein determinan la métrica dado un contenido materia-energía y las ecuaciones de Poisson (potenciales de Newton) se encuentran como un límite de tales ecuaciones. La Relatividad Especial es entonces un caso particular de la Relatividad General, para la cual la variedad  $\Psi$  es conformalmente plana y  $g$  es el tensor de Minkowski.

### 2.3. Principio Variacional de la Relatividad General

Al formular la Teoría de la Relatividad General (RG) Einstein y Hilbert proponen las ecuaciones de campo a partir de un Lagrangiano y una variación de  $S$ . Ellos encontraron de manera independiente la acción asociada al campo gravitacional, la cual es denominada acción de Einstein-Hilbert  $S_{EH}$  y, adicionalmente, está el término de frontera de Gibbons-York-Hawking  $S_{GYH}$  el cual fue introducido para relajar las condiciones de frontera<sup>4</sup>. Así pues la acción asociada con todos los campos incluyendo la materia  $S_M$  se puede escribir como [16]:

$$S = \frac{1}{2\kappa}(S_{EH} + S_{GYH}) + S_M \quad (2.9)$$

donde

$$S_{EH} = \int_v d^4x \sqrt{-g} R \quad (2.10a)$$

$$S_{GYH} = 2 \oint_{\partial v} d^3y \epsilon \sqrt{|h|} K \quad (2.10b)$$

teniendo en cuenta que:  $v$  es el hipervolumen en  $\Psi$ ,  $\partial v$  es la frontera,  $h$  es el determinante de la métrica inducida,  $K$  es la traza de la curvatura extrínseca sobre la frontera y  $\epsilon$  es  $a + 1$  si  $\partial v$  es cuasitemporal y  $-1$  si  $\partial v$  es cuasiespacial. Se asume que  $\partial v$  no es cero en ninguna parte. Ahora se obtendrán las ecuaciones de campo variando la acción respecto a  $g^{\mu\nu}$  suponiendo que:

$$\delta g_{\mu\nu} |_{\partial v} = 0 \quad (2.11)$$

es decir, la variación de la métrica se anula en la frontera. A continuación haciendo uso de las identidades de RG se realizará un repaso detallado de los principios variacionales:

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\alpha\beta}, \quad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\alpha\beta} \quad (2.12a)$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.12b)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - \nabla_\mu (\delta \Gamma_{\sigma\nu}^\sigma) \quad (2.12c)$$

---

<sup>4</sup>En este trabajo se tomará en cuenta que las variaciones en la frontera son nulas y por tanto todos los gradientes que surjan serán igualmente nulos.

La variación del término de Einstein-Hilbert es:

$$\delta S_{EH} = \int_v d^4x (R\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta R) \quad (2.13)$$

Ahora con  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  se obtendrá la variación del escalar de Ricci

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

usando la identidad (2.12c) llamada *identidad de Paladini* se puede escribir:

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - g^{\mu\sigma} (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)) \quad (2.15)$$

donde se ha usado la propiedad (2.3). Ahora al reemplazar en (2.13), se obtiene

$$\delta S_{EH} = \int_v d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} + \underbrace{\int_v d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - g^{\mu\sigma} (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda))}_{\delta S_B}, \quad (2.16)$$

donde el término subrayado se denota por:

$$\delta S_B = \int_v d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - g^{\mu\sigma} (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)). \quad (2.17)$$

Al término  $(g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - g^{\mu\sigma} (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda))$  lo definiremos como  $K^\sigma$  de modo que al usar el teorema de Gauss- Stokes

$$\int_v d^n x \sqrt{|g|} \nabla_\mu A^\mu = \oint_{\partial v} d^{n-1} y \epsilon \sqrt{|h|} n_\mu A^\mu \quad (2.18)$$

se obtiene el término de frontera

$$\delta S_B = \oint_{\partial v} d^3 y \epsilon \sqrt{|h|} n_\sigma K^\sigma \quad (2.19)$$

Al hacer la variaciones del símbolo de Christoffel <sup>5</sup> y usando las condiciones de frontera  $\delta g^{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} = 0$ , la variación de  $S_B$  queda escrita como

$$\delta S_B = \oint_{\partial v} d^3 y \epsilon \sqrt{|h|} h^{\mu\nu} \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu} n^\sigma, \quad (2.20)$$

de modo tal que la variación del término de Einstein-Hilbert es

$$\delta S_{EH} = 2 \int_v d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} - \oint_{\partial v} d^3 y \epsilon \sqrt{|h|} h^{\mu\nu} \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu} n^\sigma. \quad (2.21)$$

Como se puede observar, existe un término de frontera adicional. En la mayoría de los textos se argumenta que el flujo es nulo en el infinito; aunque este argumento conduce automáticamente a las ecuaciones de Einstein, implica fijar condiciones en la variación.

---

<sup>5</sup>Ver Apéndice A

Para evitar esto, Gibbons, York y Hawking introducen el término de frontera que permite tener un problema variacional bien definido. Para ilustrar, el término  $S_{GHY}$ , toma la forma:

$$S_{GHY} = \oint_{\partial v} d^3y \epsilon \sqrt{|h|} \delta K \quad (2.22)$$

y su variación

$$\delta S_{GHY} = \oint_{\partial v} d^3y \epsilon \sqrt{|h|} h^{\mu\nu} \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu} n^\sigma \quad (2.23)$$

es exactamente igual al término de frontera que proviene de la acción de Einstein-Hilbert. Pero en el presente trabajo las divergencias se tomarán como cero en la frontera. Por último se calcula la variación de la acción de la materia definida por

$$S_M = \int_v d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M[g_{\mu\nu}, \phi] \quad (2.24)$$

donde  $\phi$  denota a todos los campos de materia. La variación de esta acción toma la forma:

$$\delta S_M = \int_v d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_M g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \quad (2.25)$$

y a partir de ella se define el tensor de energía-impulso por

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} + \mathcal{L}_M g_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.26)$$

Entonces

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int_v d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Imponiendo que las variaciones totales permanezcan invariantes con respecto a  $\delta g^{\mu\nu}$ , se puede escribir finalmente

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \implies \kappa T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

lo que corresponde a las ecuaciones de campo dadas en el postulado 3.

# CAPÍTULO 3

## 3. Modelo Cosmológico Estándar

La Relatividad General (RG) es la base para la construcción de los modelos que describen la evolución del universo. Después de ser verificada experimentalmente, se empezaron a construir modelos a partir sus postulados; una vez dado el fracaso del modelo estático de Einstein, motivado por las observaciones en el corrimiento al rojo de las galaxias, surgieron nuevos modelos basados en las propiedades estadísticas del universo a grandes escalas.

El modelo estándar de la cosmología reposa sobre dos principios fundamentales: la homogeneidad e isotropía del espacio, y esto está descrito por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) la cual es la base fundamental abalada por varias pruebas experimentales. Existen varios modelos que guardan algunas de las propiedades de los denominados principios cosmológicos; entre ellos están los universos de Bianchi (homogéneos pero no isotrópicos) y los universos de Lemaître-Tolman-Bondi (isotrópicos pero no homogéneos)

### 3.1. La Métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker y la Expansión del Universo

El modelo cosmológico estándar actualmente está descrito por la solución propuesta por Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), la cual asume una completa homogeneidad e isotropía [16], y está descrita mediante la relación:

$$d\tau^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega \right]. \quad (3.1)$$

En ella  $a(t)$  es el factor de escala en el tiempo  $t$ ; en este factor está contenida la dinámica del universo.  $d\Omega$  es el ángulo sólido. La constante  $K$  toma un valor numérico

dependiendo de la geometría del universo:  $K = -1$  si es un espacio pseudo-esférico,  $K = 0$  si es un espacio plano y  $K = 1$  si es un espacio esférico. Los cálculos se realizarán suponiendo  $K = 0$ , ya que las observaciones actuales revelan que el universo es plano [4] con una alta exactitud.

Para cualquier época del universo, la rata de expansión está dada por el parámetro de Hubble  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , y a partir de éste se define el tiempo de Hubble  $H^{-1}$ , que da una estimación de cuánto se ha expandido el universo y la distancia o longitud de Hubble  $cH^{-1}$  que da el horizonte del universo visible, ya que estima la distancia que ha recorrido la luz en un tiempo de Hubble.

### 3.2. Ecuaciones de Evolución

La dinámica del universo está gobernada por las ecuaciones de Einstein [7, 16].

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Al calcular  $R_{\mu\nu}$  y  $R$  con la métrica FLRW, y dejándolo en términos del parámetro de Hubble se obtiene:

$$R_{00} = -3[\dot{H} + H^2], \quad (3.3a)$$

$$R_{ij} = [\dot{H} + 3H^2]\delta_{ij}, \quad (3.3b)$$

$$R = 6[\dot{H} + 2H^2]. \quad (3.3c)$$

Al considerando el tensor de energía-impulso para un fluido homogéneo, en la métrica de Friedmann:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p), \quad (3.4)$$

queda entonces que la conservación de  $T_{\nu}^{\mu}$  en virtud de la identidad de Bianchi conlleva a:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.5)$$

Esta ecuación corresponde a la conservación de la energía. Por medio de la métrica FLRW y las ecuaciones de Einstein, se obtienen dos ecuaciones ordinarias no lineales acopladas que son denominadas ecuaciones de Friedmann [8]:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa}{3}\rho, \quad (3.6a)$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p). \quad (3.6b)$$

La expansión acelerada ocurre si  $\rho + 3p < 0$ . Estas ecuaciones dan la evolución del factor de escala en términos de la densidad de energía y presión del fluido cósmico, es decir, la dinámica de un universo con métrica FLRW.

Al introducir en las ecuaciones de Einstein una constante  $\Lambda$ , denotada como una energía de vacío [16], esta reproduce una presión negativa la cual se puede asociar a una densidad. Por lo tanto las ecuaciones de Einstein con el término  $\Lambda$  toma la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Con esta ecuación de campo se puede entonces calcular las ecuaciones de Friedmann de la siguiente forma:

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.8)$$

Por tanto, la ecuación (3.6a) o (3.8) se puede reescribir así:

$$\sum \Omega_{i(t)} = 1 \quad (3.9)$$

donde se ha definido  $\Omega_{(t)} \equiv \frac{\rho_{(t)}}{\rho_c}$ , el cual es llamado *parámetro de densidad* [16], con  $\rho_c = \frac{3H^2}{\kappa}$ . Así, pues, se tienen las siguientes relaciones:

$$\Omega_m = \frac{\kappa\rho}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (3.10)$$

con lo cual (3.9) se escribe como:

$$\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1. \quad (3.11)$$

Al considerar el universo como un fluido barotrópico perfecto, éste tiene una ecuación de estado con la forma:

$$\omega_{eff} = p/\rho, \quad (3.12)$$

donde se asume que  $\omega$  es constante. Por ejemplo,  $\omega = 0$  si el fluido es polvo,  $\omega = 1/3$  si el fluido es radiación. Ahora, de las soluciones (3.6a) y (3.6b)  $\omega_{eff}$  toma el valor de:

$$\omega_{eff} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}. \quad (3.13)$$

Haciendo uso de la ecuación (3.13) e integrando con respecto al tiempo se obtiene:

$$H = \frac{2}{3} \frac{1}{(1+\omega)(t-t_0)}. \quad (3.14)$$

De ahí que la expresión para  $a$  sea de la forma

$$a \propto (t-t_0)^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \quad (3.15)$$

y al integrar la ecuación (3.5) se obtiene la densidad en función del factor de escala:

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (3.16)$$

Debido a que el universo está compuesto de diverso contenido material (materia, radiación, materia oscura, energía oscura, etc.) la ecuación (3.15) se pueden escribir en términos de los diversos contenidos

$$\rho = \sum \rho_i^{(0)} (a/a_0)^{-3(1+\omega_i)}. \quad (3.17)$$

Por ejemplo para el caso en que el universo sólo contenga polvo,  $\rho \propto a^{-3}$ , y si por el contrario contiene sólo radiación  $\rho \propto a^{-4}$ . Se tiene entonces lo siguiente:

$$\rho = \rho_m (a/a_0)^{-3} + \rho_r (a/a_0)^{-4}. \quad (3.18)$$

Así pues, en la actualidad el universo se encuentra expandiéndose aceleradamente y con un abundante contenido de materia y energía que no se conoce. Aunque se tiene el formalismo  $\Lambda$ CDM [19], hay ciertos indicios que pueden llevar a desechar la constante cosmológica.

Aun así existen diversos problemas fundamentales como el problema de la coincidencia y el ajuste fino entre otros [8, 16]; es por estos problemas y la imposibilidad de dar una explicación razonable a la energía oscura que se han propuesto teorías alternativas para explicar la actual expansión acelerada del universo. Una de ellas es considerar teorías de gravedad de alto orden, en las cuales se pueda ver tal expansión como resultado de términos adicionales en las ecuaciones de campo de Einstein, debidos solamente a contribuciones geométricas.

### 3.3. Distancia en el Modelo Estándar

Un aspecto importante en la cosmología se refiere a la medida de las distancias; como se verá, tal medida depende de la métrica usada y también del contenido material en el universo. Las observaciones están basadas en la radiación que viaja a través del espacio-tiempo y que llegan a nosotros por geodésicas nulas. En el caso del universo FLRW es posible escoger geodésicas radiales por lo que la coordenada  $d\Omega$  es igual a cero, y por lo tanto  $0 = -dt^2 + a^2(t)dr^2$ . de aquí al integrar se obtiene que

$$r = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_e}^{a_0} \frac{da}{a(t)a(\dot{t})}, \quad (3.19)$$

con  $a(\dot{t}) = \frac{da(t)}{dt}$ .

### 3.3.1. Redshift

Suponiendo un objeto distante desplazándose con el espacio ubicado en una posición  $(t, \zeta, \theta, \mu)$  con  $\theta$  y  $\mu$  fijos, el cual emite un fotón de energía  $\Delta E$  en un intervalo  $\Delta t$  y un punto de observación la tierra en la posición  $(t_0, 0, 0, 0)$ , en el cual se registra la llegada de cada fotón con energía  $\Delta E_0$  en un intervalo  $\Delta t_0$ , entonces la luminosidad absoluta y aparente están definidas por:

$$L_s = \frac{\Delta E}{\Delta t}, \quad L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0}, \quad (3.20)$$

respectivamente. Por otro lado se sabe que la energía de Planck para cada fotón es  $\Delta E = h\nu$  donde  $\nu$  es la frecuencia del fotón; de esta manera, por la definición del efecto Doppler [16]

$$1 + z = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{a_0}{a} \quad (3.21)$$

entonces

$$\frac{\Delta E}{\Delta E_0} = 1 + z. \quad (3.22)$$

También para el intervalo de tiempo y de acuerdo con la ecuación de geodésica y la métrica de FLRW se tiene

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t} = 1 + z; \quad (3.23)$$

por lo tanto, de las ecuaciones (3.20), (3.22) y (3.23) se obtiene

$$L_s = L_0(1 + z)^2. \quad (3.24)$$

Ahora, derivando la ecuación (3.21) con respecto al tiempo, se tiene

$$\frac{dz}{dt} = -H(1 + z). \quad (3.25)$$

Para un fotón se define el flujo  $F$

$$F = \frac{L_0}{4\pi(a_o\zeta)^2}, \quad (3.26)$$

donde  $\zeta$  es el factor de escala reescrito para un fotón. Cabe resaltar que un concepto importante es la definición de la distancia de luminosidad:

$$d_L^2 = \frac{L_s}{4\pi F}. \quad (3.27)$$

Entonces, en virtud de (3.24), se llega a:

$$d_L = a_o\zeta(1 + z). \quad (3.28)$$



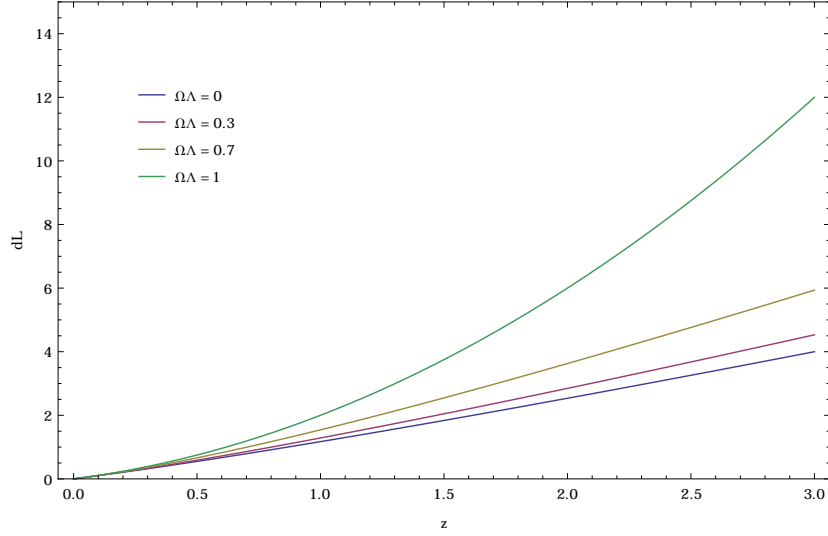


Figura 1: Distancia de Luminosidad en función de  $z$  para un fluido con diferentes  $\Omega_\Lambda$  siguiendo las relaciones (3.11) y (3.32)

### 3.3.2. Distancia de luminosidad $d_L(z)$

Las observaciones realizadas a finales de los 90 a las supernova tipo Ia, demuestran la expansión acelerada del universo [3, 4, 5, 6, 8]; con la ayuda del corrimiento al rojo, el cual es relacionado con el factor de luz emitida por una estrella [8] y luego contrastado con el efecto Doppler [16], se encuentra la distancia de luminosidad; ésta está descrita por:

$$d_L = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')} \quad (3.29a)$$

donde  $h(z') = H(z)/H_0$ . Por tanto se puede obtener la constante de Hubble en términos de  $d_L$

$$[H(z)]^{-1} = \frac{d}{dz} \frac{d_L(z)}{1+z} \quad (3.29b)$$

Es decir, si se midiera la distancia de luminosidad, se podría determinar a que razón se expande el universo.

Ahora si se considera la densidad de energía dada en la ecuación (3.17), y tomando en cuenta todo el material del universo, se tiene que:

$$\rho = \sum \rho_i^{(0)} (a/a_0)^{-3(1+\omega_i)} = \sum \rho_i^{(0)} (1+z)^{3(1+\omega_i)} \quad (3.30)$$

Así pues, para la ecuación (3.6a) es conveniente reescribirla de la forma:

$$H^2 = H_0^2 \sum \Omega_i^{(0)} (1+z)^{3(1+\omega_i)} \quad (3.31)$$

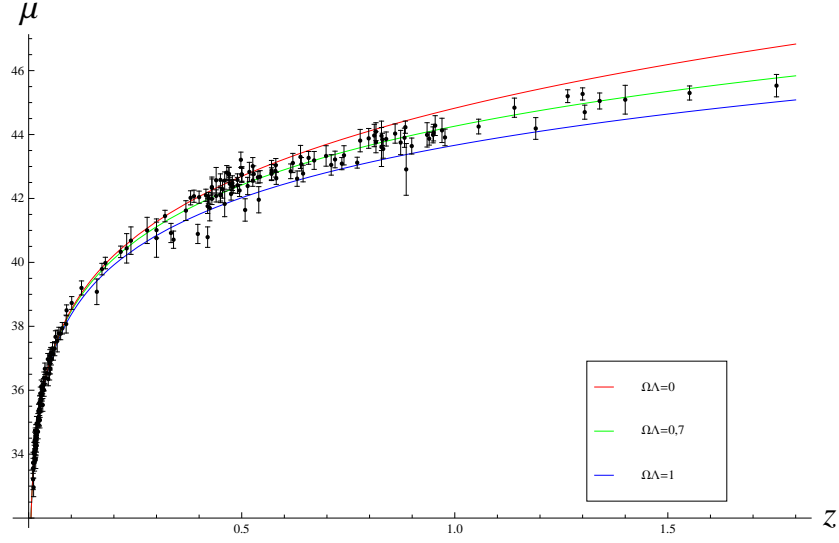


Figura 2: Distancia de luminosidad  $\mu$  en base logarítmica en función de  $z$  para diferente contenido material en comparación con los puntos observacionales usando los datos registrados en [2] por A. Riess (2004).

Ahora sí, se puede escribir la ecuación de luminosidad en términos de las diferentes componentes del universo

$$d_L = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum \Omega_i^{(0)} (1+z')^{3(1+\omega_i)}}}. \quad (3.32)$$

### 3.4. Dinámica de la Energía Oscura

#### 3.4.1. Evidencia Observacional de Supernovas tipo Ia

Diversos estudios sobre este tipo de supernovas sugieren que el universo está dominado por una clase de energía que procede de una constante cosmológica teórica [1]; así pues se puede estimar que para la distancia de luminosidad hay dos tipos de componentes en el universo:

$$H_0 d_L = 1,23, \quad \Omega_m^{(0)} \cong 0,3, \quad \Omega_\Lambda^{(0)} \cong 0,7 \quad (3.33)$$

y esto es consistente para una época dominada por energía oscura.

### 3.4.2. Edad del Universo

Ahora con las evidencias ofrecidas en la figura (1) y de acuerdo con la relación dada en (3.25) y haciendo uso de (3.30) se puede integrar el tiempo obteniendo:

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{H_0(1+z)(\Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^{(0)})^{1/2}} \quad (3.34a)$$

y al calcular la integral, se obtiene

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda^{(0)}}} \ln \frac{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda^{(0)}}}{\sqrt{\Omega_m^{(0)}}}. \quad (3.34b)$$

Ahora al reemplazar el valor de  $H_0^{-1} = 9,776h^{-1}Gyr$  con  $0,64 < h < 0,80$ . se obtiene un  $t_0 = 13,1Gyr$  para  $h = 0,72$ , edad que cumple con las observaciones [1, 3, 8, 6, 4, 5]. Por lo tanto, se requiere de la existencia de la energía oscura para el comportamiento del universo.

# CAPÍTULO 4

## 4. Ecuaciones de Campo en Teoría $F(R)$

Aunque la teoría de la Relatividad General se supone válida y se han probado experimentalmente varias de sus soluciones, se han desarrollado teorías alternativas [18]; en particular, está el estudio de los lagrangianos cuadráticos<sup>6</sup> [17, 22]. El punto fundamental de estas teorías consiste, en los lagrangianos que describen el campo gravitacional modificando la gravedad. Por ejemplo, la acción original de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \int_v d^4 \sqrt{-g} R \quad (4.1a)$$

Puede ser generalizada por la acción de Eddington y Weyl

$$S_{R^2} = \int_v d^4 x \sqrt{-g} (R + \alpha R^2) \quad (4.1b)$$

donde  $\alpha$  es una constante. En esta acción el lagrangiano conduce a unas ecuaciones de campo que son de cuarto orden en la métrica, lo que lleva a que existan nuevos grados de libertad en la teoría. Se puede pensar en lagrangianos compuestos de los posibles escalares que se obtienen del tensor de Riemann y sus derivadas; sin embargo, tales teorías tienen el mismo problema de los grados de libertad.

Después de que Einstein propusiera la RG y que Hilbert encontrara el lagrangiano, Kretschmann propuso una acción con el escalar  $R_{\mu\nu\gamma\lambda} R^{\mu\nu\gamma\lambda}$  denominado el *escalar de Kretschmann*, proponiendo el tensor de Riemann como el tensor fundamental para la gravitación, este modelo al parecer es una buena opción; además preserva las identidades de Bianchi. Sin embargo, en él aparecen términos de cuarto orden en la métrica. Aun así eso se puede evitar considerando el escalar de Gauss-Bonnet [15]

---

<sup>6</sup>Proporcionales al cuadrado del escalar de Ricci.

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\gamma\lambda}R^{\mu\nu\gamma\lambda}.$$

Existen otras posibilidades generalizando el término de Gauss-Bonnet, usando la traza del término de Weyl, las denominadas *teorías de gravedad conformes* (que son teorías localmente invariantes) y las *Teorías  $F(R)$*  que surgen de considerar una función del escalar de Ricci arbitraria. De estas teorías hay tres casos diferentes:

1. Formalismo Métrico:

$$S = S_{met} + S_M, \quad S_{met} = \frac{1}{2\kappa} \int_v d^4x \sqrt{-g} F(R) \quad (4.2)$$

donde las variaciones son respecto a  $g_{\mu\nu}$ .

2. Formalismo de Palatini: donde la métrica  $g_{\mu\nu}$  es independiente de la conexión  $\Gamma_{\mu\nu}^\gamma$ .
3. Formalismo Métrico-Afín: similar al de Palatini pero en este caso la acción de la materia depende de la conexión.

A continuación se mostrará la obtención de las ecuaciones de campo para el formalismo Métrico, sin incluir el término de frontera.

## 4.1. Ecuaciones de Campo en el Formalismo Métrico

Las ecuaciones serán deducidas sin el término de Gibbons-York-Hawking el cual toma la forma:

$$S'_{GYH} = 2 \oint_{\partial v} d^3y \epsilon \sqrt{|h|} F'(R) K; \quad (4.3)$$

para este caso todas las integrales de línea se hacen cero en la frontera.

Se considera el espacio-tiempo con la misma variedad usada en el postulado 1. El lagrangiano ahora es una función arbitraria del escalar de Ricci. De nuevo se asume que la variedad posee una conexión de Levi-Civita.

La acción total sin GYH queda escrita de la forma:

$$S_{total} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{F(R)}{2\kappa} + \mathcal{L}_{materia} \right) = S_{F(R)} + S_{\mathcal{L}}. \quad (4.4)$$

Ahora, al variar la acción  $S_{F(R)}$ ,

$$\delta S_{F(R)} = \int_v d^4x (F'(R) \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta F(R)), \quad (4.5)$$

la variación de la funcional  $F(R)$  se puede escribir como

$$\delta F(R) = F'(R)\delta R. \quad (4.6)$$

Usando la identidad (2.14) y la variación del término dado en el apéndice A, se tiene que:

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}), \quad (4.7)$$

con  $\square \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$ . Al reemplazar este resultado en la variación (4.5), se tiene

$$\delta S_{F(R)} = \int d^4x \sqrt{-g} [F'(R)(\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square (\delta g^{\mu\nu}) + \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu})) - \frac{1}{2} F(R) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}]. \quad (4.8)$$

Ahora se considerarán los siguientes términos:

$$\int d^4x \sqrt{-g} [F'(R) g_{\mu\nu} \square (\delta g^{\mu\nu})]. \quad \int d^4x \sqrt{-g} [F'(R) \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu})]. \quad (4.9)$$

Para estas integrales se hace una integración por partes definiendo las siguiente cantidades:

$$M_\tau = [F'(R) g_{\mu\nu} \nabla_\tau (\delta g^{\mu\nu})] - [\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla_\tau (F'(R))], \quad (4.10a)$$

$$N^\sigma = [F'(R) \nabla_\gamma (\delta g^{\gamma\sigma})] - [\delta g^{\sigma\gamma} \nabla_\gamma (F'(R))]. \quad (4.10b)$$

Habiendo reducido estas variables y usando el resultado dado en el apéndice B en las ecuaciones (B-5) y (B-7), se llega a:

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [F'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} F(R) g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] F'(R)] \delta g^{\mu\nu} \\ - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

es entonces que al calcular el tensor de Energía-impulso para este campo, siguiendo el principio estacionario dado en (2.26):

$$F'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} F(R) g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] F'(R) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (4.12)$$

Estas ecuaciones son claramente ecuaciones de cuarto orden en la métrica por las contribuciones de los operadores  $\square$  y  $\nabla_\mu \nabla_\nu$ . Además, cuando  $F(R) = R$ , se ve claramente que el tensor (4.12) es exactamente la acción de Einstein-Hilbert. Ahora al calcular la traza del tensor (4.12), se obtiene

$$3\square F'(R) + R F'(R) - 2F(R) = \kappa T, \quad (4.13)$$

donde se puede observar que a diferencia de la RG la relación entre  $R$  y  $T$  pasa de ser una relación algebraica a una relación diferencial para  $R$ . En RG la relación entre  $R$  y  $T$  está dada por  $R = -\kappa T$ , lo que implica que en el vacío ( $T = 0$ ) las ecuaciones se reducen a  $R = 0$ . sin embargo, para este caso, cuando  $T = 0$ , no necesariamente se obtiene un escalar nulo.

De la ecuación (4.13) el potencial efectivo está definido como [23]

$$\square F'(R) = \frac{\partial V_{eff}}{\partial F'(R)}. \quad (4.14)$$

Ahora, suponiendo que el tensor de Ricci es constante covariantemente y que  $R_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$  entonces la ecuación (4.13) se reduce a

$$0 = 2F(R) - RF'(R) \quad (4.15)$$

Por ejemplo,

$$F(R) = R - \frac{\mu^{2m+2}}{R^m} \quad (4.16a)$$

donde  $\mu$  es una constante con unidades de masa. La solución de (4.15) está dada por:

$$R = (2 + m)^{\frac{1}{m+1}} \mu^2. \quad (4.16b)$$

Es posible escribir las ecuaciones de Einstein en términos de este formalismo. Para ésto, se escribe la ecuación (2.5) de la forma:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{F'(R)} + g_{\mu\nu} \frac{[F(R) - RF'(R)]}{2F'(R)} + \frac{[\nabla_\mu \nabla_\nu F'(R) - g_{\mu\nu} \square F'(R)]}{F'(R)} \quad (4.17a)$$

o

$$\frac{\kappa}{F'(R)} (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{eff}), \quad (4.17b)$$

donde

$$\kappa T_{\mu\nu}^{eff} = g_{\mu\nu} \frac{[F(R) - RF'(R)]}{2} + [\nabla_\mu \nabla_\nu F'(R) - g_{\mu\nu} \square F'(R)] \quad (4.17c)$$

De esta manera, los efectos de la modificación de las ecuaciones de campo se pueden interpretar como una contribución de un *fluido de curvatura* correspondiente a términos solamente geométricos; de igual manera se puede mostrar que  $T_{\mu\nu}^{eff}$  satisface las condiciones del postulado 2.

## 4.2. Modelos Cosmológicos en Teorías $F(R)$

A continuación se aplicará el formalismo  $F(R)$  para un universo homogéneo e isotrópico descrito por la métrica FLRW. Al reemplazar en la ecuación (4.12) las relaciones dadas en (3.3a), (3.3b) y (3.3c) se obtiene:

$$0 = -\frac{F(R)}{2} + 3(H^2 + \dot{H})F'(R) - 3H\frac{d}{dt}F'(R) + \kappa^2\rho_{materia} \quad (4.18a)$$

$$0 = \frac{F(R)}{2} - (\dot{H} + 3H^2)F'(R) + 6(8H^2\dot{H} + 4\dot{H}^2 + 6H\ddot{H} + \ddot{H})F''(R) + 36(4H\dot{H} + \ddot{H})^2F'''(R) + \kappa^2 p_{materia}, \quad (4.18b)$$

las cuales se pueden reescribir, ya que  $F(R) = R + f(R)$ , con ayuda de las ecuaciones de friedmann dadas en (3.6a) y (3.6b), como

$$H^2 = \frac{1}{3f'(R)} \left[ \kappa\rho + \frac{Rf'(R) - f(R)}{2} - 3H\dot{R}f''(R) \right], \quad (4.19a)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\frac{1}{f'(R)} \left[ \kappa p + \frac{f(R) - Rf'(R)}{2} + 2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + (\dot{R})^2 f'''(R) \right]. \quad (4.19b)$$

Tambi3n se puede extraer de la ecuaci3n (4.15) otra relaci3n para  $F(R)$  de la forma:

$$F'(R)R - 2F(R) + 3\Box F'(R) = \kappa(3p - \rho). \quad (4.20)$$

A partir de las ecuaciones (4.19a) y (4.19b) se pueden definir una densidad y una presi3n asociadas a los t3rminos adicionales de la curvatura:

$$\rho_{EO} = \frac{1}{f'(R)} \left[ \frac{Rf'(R) - f(R)}{2} - 3H\dot{R}f''(R) \right], \quad (4.21a)$$

$$p_{EO} = -\frac{1}{f'(R)} \left[ \frac{f(R) - Rf'(R)}{2} + 2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + (\dot{R})^2 f'''(R) \right], \quad (4.21b)$$

de modo tal que la ecuaci3n de estado (3.12) se puede escribir como:

$$\omega_{eff} = \frac{p_{EO}}{\rho_{EO}} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\frac{f(R) - Rf'(R)}{2} + 2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + (\dot{R})^2 f'''(R)}{\left[ \frac{Rf'(R) - f(R)}{2} - 3H\dot{R}f''(R) \right]}, \\ \omega_{eff} &= -1 + \frac{\ddot{R}f''(R) - H\dot{R}f''(R) + (\dot{R})^2 f'''(R)}{\left[ \frac{Rf'(R) - f(R)}{2} - 3H\dot{R}f''(R) \right]}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

De forma similar a la ecuaci3n de continuidad para las contribuciones de la densidad en la materia. Se puede obtener una expresi3n para la ecuaci3n de estado efectiva para las componentes  $\rho_{EO}$  y  $p_{EO}$  de la forma:



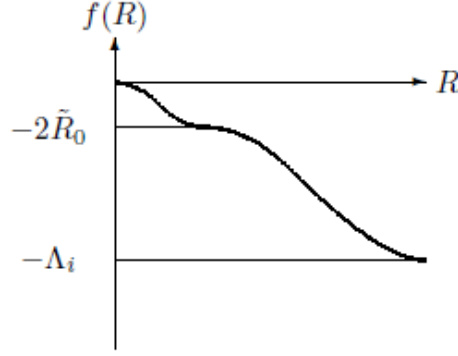


Figura 3: Típico  $F(R)$  que cumple con las condiciones para expansión acelerada e inflación

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0 \quad (4.24)$$

Por último si se consideran las ecuaciones de campo modificadas constituidas por un fluido efectivo, las ecuaciones de friedmann se pueden escribir como:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho_{tot} + 3p_{tot}), \quad (4.25)$$

donde el subíndice denota la suma total de todo el fluido con las contribuciones de materia a la densidad de energía y presión. Se puede entonces concluir que:

$$\rho_{tot} = \rho_{EO} + \rho_m,$$

$$\rho_{tot} + 3p_{EO} < 0, \quad (4.26)$$

lo cual conduce a determinar alguna forma específica la función  $f(R)$  y obtener expansión acelerada.

Existen varias propuestas dentro del marco  $F(R)$ , que son usadas con el fin de obtener expansión acelerada, Sin embargo, ciertos modelos presentan problemas de inestabilidades en sistemas locales [20, 23] (sistema solar); esto ha llevado a que se consideren algunas restricciones en las funciones  $f(R)$  en particular:

- Para inflación:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) = -\Lambda_i \quad (4.27)$$

donde  $\Lambda_i$  es la constante cosmológica efectiva que debe ser  $\gg (10^{-33}eV)^2$  para un universo temprano, es decir, del orden de  $(10^{28}eV)^2$ .

- Aceleración:

$$F(R_0) = -2\widehat{R}_0, \quad F'(R_0) \sim 0, \quad (4.28)$$

donde  $R_0$  es la curvatura normal del universo asumiendo que  $R_0 > \widehat{R}_0$ . Debe estar  $\sim (10^{-33}eV)^2$ .

- Para evitar Antigraavedad

$$f'(R) > -1, \quad (4.29)$$

$$f''(R) > 0. \quad (4.30)$$

- Solución espacio-temporal plana

$$\lim_{R \rightarrow 0} f(R) = 0. \quad (4.31)$$

En la figura (3) se observa un  $f(R)$  que cumple con las condiciones (4.27), (4.28), y (4.31) para la expansión acelerada incluyendo inflación.

# CAPÍTULO 5

## 5. Dinámica de la Energía Oscura en $F(R)$

Al finalizar el capítulo anterior se dieron algunos criterios para excluir o incluir modelos  $f(R)$  viables para el fenómeno de la energía oscura, en esta sección se considera el sistema dinámico en teoría  $f(R)$ , lo cual permitirá tener más criterio de viabilidad para dichas funciones.

### 5.1. Aproximaciones de Sistema Dinámico en $f(R)$

A continuación se realizará un análisis del sistema dinámico siguiendo [8, 17]. Se consideran las ecuaciones (4.19a) y (4.19b), las contribuciones de la densidad de energía y la presión para la materia.

$$3f'(R)H^2 = \kappa\rho_m + \frac{f'(R)R - f(R)}{2} - 3Hf'(R), \quad (5.1a)$$

$$-2f'(R)\dot{H} = \kappa\rho_m + f''(R) - Hf'(\dot{R}). \quad (5.1b)$$

Ahora, se elimina la dependencia de  $R$  en las funciones  $f(R)$  y  $f'(R)$  con  $\aleph \equiv \ln a$  y se define el operador diferencial de la siguiente manera:

$$\frac{d}{d\aleph} = \frac{d}{d\ln a} = \frac{1}{H} \frac{d}{dt}$$

La ecuación (5.1a) se puede escribir como

$$1 = \frac{\kappa\rho_m}{3f'(R)H^2} + \frac{R}{6H^2} - \frac{f(R)}{6f'(R)H^2} - \frac{f'(\dot{R})}{f'(R)H} \quad (5.2)$$

en la cual se definen las siguientes variables dinámicas:

$$\Omega_m = \frac{\kappa\rho_m}{3f'(R)H^2} \quad x_3 = 2 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad x_2 = -\frac{f(R)}{6f'(R)H^2} \quad x_1 = -\frac{f'(\dot{R})}{f'(R)H} \quad (5.3)$$

por lo cual

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m = x_1 + x_2 + x_3.$$

Con las definiciones de las variables dinámicas se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento. Aquí se ilustra el mecanismo para encontrar la ecuación de movimiento para  $x_1$ , al derivar  $x_1$  respecto al tiempo y reemplazando la ecuación (5.1b)

$$\begin{aligned} -\frac{dx_1}{dt} &= \frac{-2f'(R)\dot{H} - \kappa\rho_m + Hf'(\dot{R})}{f'(R)H} - \frac{f'(\dot{R})^2}{f'(R)^2H} + \frac{f'(\dot{R})\dot{H}}{f'(R)H^2}, \\ -\frac{dx_1}{d\aleph} &= \frac{-2f'(R)\dot{H} - \kappa\rho_m + Hf'(\dot{R})}{f'(R)H^2} - \frac{f'(\dot{R})^2}{f'(R)^2H^2} - \frac{f'(\dot{R})\dot{H}}{f'(R)H^3}, \end{aligned}$$

Ahora, usando las definiciones en (5.3)

$$\begin{aligned} &= \frac{-2\dot{H}}{H^2} - \frac{\kappa\rho_m}{f'(R)H^2} + \frac{f'(\dot{R})}{f'(R)H} - \frac{f'(\dot{R})^2}{f'(R)^2H^2} - \frac{f'(\dot{R})\dot{H}}{f'(R)H^3} \\ &= -2(x_3 - 2) - \Omega_m - x_1 - x_1^2 + x_1(x_3 - 2) \end{aligned}$$

de la ecuación restricción para los valores de  $\Omega_m$

$$= -2x_3 + 4 - 3(1 - x_1 - x_2 - x_3) - x_1 - x_1^2 + x_1x_3 - 2x_1$$

y reescribiendo se obtiene:

$$-\frac{dx_1}{d\aleph} = 1 + x_3 + 3x_2 - x_1 + x_1x_3. \quad (5.4)$$

De forma análoga se obtiene para las variable  $x_2$  y  $x_3$

$$\frac{dx_1}{d\aleph} = -1 - x_3 - 3x_2 + x_1^2 - x_1x_3, \quad (5.5a)$$

$$\frac{dx_2}{d\aleph} = \frac{x_1x_3}{m} - x_2(2x_3 - 4 - x_1), \quad (5.5b)$$

$$\frac{dx_3}{d\aleph} = -\frac{x_1x_3}{m} - 2x_3(x_3 - 2), \quad (5.5c)$$

donde se ha definido lo siguiente:

$$m \equiv \frac{Rf''(R)}{f'(R)} = \frac{Rf'(\dot{R})}{f(\dot{R})}, \quad (5.6a)$$

$$r \equiv -\frac{Rf'(R)}{f(R)} = \frac{x_3}{x_2}. \quad (5.6b)$$

De la expresi3n para  $r$  el escalar  $R$  se puede escribir como  $x_3/x_2$ , y como  $m$  depende de  $R$ , implica que  $m = m(r)$ . A partir de las relaciones (3.13) y  $x_3$  se obtiene:

$$\omega_{eff} = -\frac{(2x_3 - 1)}{3}. \quad (5.7)$$

La idea es determinar la estabilidad del sistema dinámico. Siguiendo [17, 8] los puntos fijos  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  deben satisfacer de forma simultanea que  $g_i(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$  para todo  $i \neq j$ , donde

$$g_i(x'_1, x'_2, x'_3) = \frac{dx_i}{d\aleph}$$

como en (C-1) para hallar la estabilidad.

$P : (x_1, x_2, x_3)$	$\omega_{eff}$	$\Omega_m$
$P_1 : (0, -1, 2)$	$-1$	$0$
$P_2 : (-1, 0, 0)$	$1/3$	$2$
$P_3 : (\frac{2(1-m)}{1+2m}, \frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)})$	$\frac{2-5m-6m^2}{3m(1+2m)}$	$0$
$P_4 : (1, 0, 0)$	$1/3$	$0$
$P_5 : (-4, 5, 0)$	$1/3$	$0$
$P_6 : (\frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)})$	$-\frac{m}{1+m}$	$1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2}$

tabla 5.1: Valores para los puntos cr3ticos del sistema dinámico, la ecuaci3n de estado efectiva  $\omega_{eff}$ , y el valor para  $\Omega_m$  usando (C-2)

En la tabla (5.1) se muestran los puntos cr3ticos del sistema dinámico, donde los puntos  $P_3$  y  $P_6$ , satisfacen que:

$$x_3 = -(m(r) + 1)x_2$$

es decir

$$m(r) = -(r + 1) \quad (5.8)$$

## 5.2. Estabilidad de los puntos críticos

Al calcular la matriz  $\mathcal{J}$  como en el Apéndice C.1 en la ecuación (C-5) se obtiene que:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 & -3 & -1 - x \\ \frac{x_3}{m} + x_2 & x_1 x_2 \partial_{x_2} \left( \frac{1}{m} \right) - 2x_3 + 4 + x_1 & x_1 \partial_{x_3} \left( \frac{x_3}{m} \right) - 2x_2 \\ -\frac{x_3}{m} & -x_1 x_3 \partial_{x_2} \left( \frac{1}{m} \right) & -x_1 \partial_{x_3} \left( \frac{x_3}{m} \right) - 4x_3 + 4 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

De los valores propios para dicha matriz usando (C-7) se tienen las siguientes condiciones.

- $P_1$ : Punto de-Sitter.

Este punto  $\omega_{eff} = -1$ ,  $[8, 15, 14, 21, 11, 7, 16]$  corresponde a soluciones de tipo de-Sitter que satisface la ecuación (4.15) la cual se puede escribir de la forma

$$RF'(R) - 2f(R) = 0 \quad (5.10)$$

Para este punto los autovalores son:

$$\left\{ -3, \quad -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{25 - \frac{16}{m_{[-1,2]}}}}{2} \right\} \quad (5.11)$$

donde  $m_{[-1,2]} = m(r = -2)$  y  $r_{[-1,2]} = -2$ . Así pues,  $P_1$  es estable cuando  $0 < m(r = -2) \leq 1$  y un punto de silla en los demás valores. Por tanto la condición de estabilidad del punto de de-Sitter es:

$$0 < m_{[r=-2]} \leq 1 \quad (5.12)$$

- $P_2$ : Punto  $\phi$ -EDM (*Época de Dominio de Materia*).

Este punto está caracterizado por una época cinética en la cual, la materia y un campo  $\phi$  coexisten con fracción de energía constante. [17] Los autovalores son:

$$\left\{ -2, \quad 3, \quad 4 + \frac{1}{m_{[0,0]}} \right\} \quad (5.13)$$

debido a que  $m_{[0,0]}$  está indeterminado, se toman los autovalores restantes; de este modo, el punto  $P_2$  es un punto de silla.

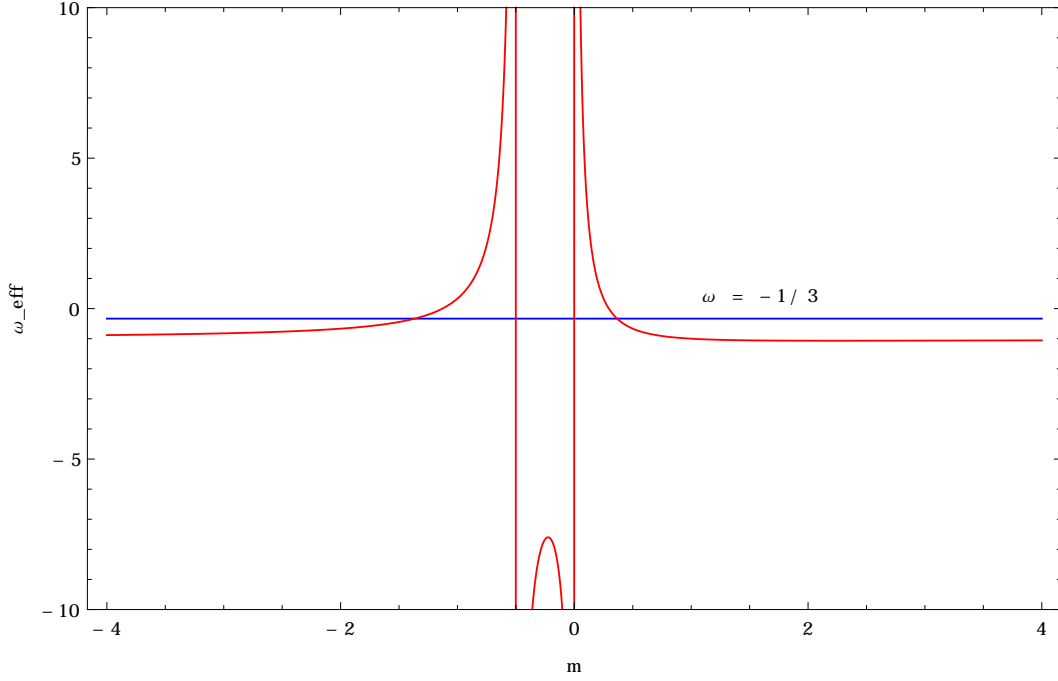


Figura 4: Comportamiento de  $\omega_{eff}$  en función de  $m$  para el punto  $P_3$

- $P_3$ : Punto para la Época de Dominio de Curvatura.

Éste corresponde a un punto de dominio de la curvatura cuya ecuación de estado efectiva depende de  $m$ , debido a que la aceleración del universo está determinada por ( $\omega_{eff} < -1/3$ ) se puede observar en la figura (4) que ocurre expansión acelerada para:

$$m < -\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} < m < 0, \quad m > \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Los autovalores para este punto son

$$\left\{ \frac{1-4m_{[h]}}{m_{[h]}}, \quad \frac{2-3m_{[h]}-8m_{[h]}^2}{m_{[h]}(1+2m_{[h]})}, \quad \frac{2(1-m_{[h]})(1+m'_{[h]})}{m_{[h]}(1+2m_{[h]})} \right\} \quad (5.14)$$

Con el valor  $m_{[h]}$  definido para la evaluación de  $m(r = x_3/x_2)$ . De modo que la estabilidad de  $P_3$  depende de  $m_{[h]}$  y  $m'_{[h]}$ . en el límite  $m_{[h]} \rightarrow \pm\infty$  se tiene que ( $P_3 \rightarrow (-1, 0, 2)$ ) con una ecuación de estado  $\omega_{eff} = -1$ . este punto es estable con  $m'_{[h]} > -1$ .

Si se hace  $m_{[h]} = 1$  se tiene que el punto  $P_3$  es un punto de Sitter, lo cual coincide con  $P_1$  y puesto que en este caso  $r = -2$  el punto se caracteriza por

$$m(r = -2) \longrightarrow 1 \quad (5.15)$$

el punto  $P_3$  es estable y acelerado para cuatro diferentes rangos:

1.  $m'_{[h]} > -1$  Cuando ocurre esto,  $P_3$  es estable y acelerado en las siguientes regiones:
    - a)  $m_{[h]} < -(1+\sqrt{3})/2$ , este es acelerado pero no con condición de Phantom, es decir  $w_{eff} > -1$ . Pero se tiene el límite de de Sitter  $\omega_{eff} = -1$  cuando  $m_{[h]} \longrightarrow -\infty$ .
    - b)  $m_{[h]} \geq 1$ , tiene una ecuación tipo Phantom con  $-1,07 < \omega_{eff} < -1$ , y en el límite  $m_{[h]} \longrightarrow +\infty$  y  $m_{[h]} \longrightarrow 1$  se tiene un tipo de Sitter.
    - c)  $-1/2 < m_{[h]} < 0$   $P_6$  obedece a una ecuación tipo Phantom con  $\omega_{eff} < -7,6$ .
  2.  $m'_{[h]} < -1$  Para esta condición el punto es estable y acelerado cuando
    - a)  $(\sqrt{3} + 1) < m_{[h]} < 1$  con  $\omega_{eff} > -1$  para lo cual no hay ecuación tipo Phantom.
- $P_4$ : Punto de Radiación.

Este punto corresponde también a una época cinética, pero, a diferencia del punto  $P_2$ , la fracción de materia se hace cero. Los autovalores son:

$$\left\{ 2, \quad 5, \quad 4 - \frac{1}{m_{[0,0]}} \right\} \quad (5.16)$$

Este punto se puede ver como un caso especial del punto  $P_3$  con  $m = 1/4$ , de modo que es estable para  $0 > m_{[0,0]}$  y  $m_{[0,0]} > 1/4$  y es punto silla para los demás puntos.

- $P_5$ .

Este punto es similar al punto  $P_4$  pues ambos tienen el mismo valor para  $\omega_{eff}$  y  $\Omega_m$ , también es un caso especial del punto  $P_3$  con  $m = -1$ . los autovalores son:

$$\left\{ -5, \quad -3, \quad 4 + \frac{4}{m_{[5,0]}} \right\} \quad (5.17)$$

en este caso el punto  $P_5$  es también un punto silla para todos sus puntos, pero estable para  $-1 < m_{[5,0]} < 0$ . Pero ninguno de los puntos  $P_4$  o  $P_5$  pueden ser usados para la época de dominio de materia, ni para expansión acelerada.



■  $P_6$ : Scaling Solutions

Este punto corresponde a una solución escalar las cuales dan una razón constante entre  $\Omega_m/\Omega_\Lambda$ . Los autovalores son:

$$\left\{ 3(1 + m'_{[k]}), \quad \frac{-3m_{[k]} \pm \sqrt{m_{[k]}(256m_{[k]}^3 + 160m_{[k]}^2 - 31m_{[k]} - 16)}}{4m_{[k]}(1 + m_{[k]})} \right\} \quad (5.18)$$

En el límite cuando  $m_{[k]} \rightarrow 0$  el punto representa una era de materia estándar como en (3.15) de modo que para un  $m = 0$  se necesita  $r = -1$ . Los autovalores para  $P_5$  usando el límite  $|m_{[k]}| \ll 1$  se pueden escribir aproximadamente como [17]:

$$\left\{ 3(1 + m'_{[k]}), \quad -\frac{3}{4} \pm \sqrt{-\frac{1}{m_{[k]}}} \right\} \quad (5.19)$$

donde se ha denotado a  $m_{[k]} = m(r)$ . Para modelos con  $m_{[k]} < 0$ , las soluciones no pueden permanecer por un periodo largo de tiempo alrededor del punto  $P_6$  debido al comportamiento divergente de los autovalores cuando  $m_{[k]} \rightarrow 0^-$ , el segundo autovalor da complejos con parte real negativa para  $0 < m_{[k]} < 0,327$  de modo que los autovalores tiene parte real negativa, así exigiendo que  $m'_{[k]} > -1$ , el punto  $P_5$  corresponde a un punto silla, de la siguiente forma:

$$m(r \leq -1) > 0, \quad m'(r \leq -1) > -1 \quad (5.20)$$

De esto se concluye entonces que [17]:

1. *La aceleración asintótica no puede tener una ecuación de estado en el rango  $-7,6 < \omega_{eff} < -1,07$ .*
2. hay dos clases de modelos que son cosmológicamente viables:
  - (A) Modelos que conectan  $P_3(r \simeq -1, m \simeq 0^+)$  con  $P_1(r = -2, 0 < m \leq 1)$
  - (B) Modelos que conectan  $P_6(r \simeq -1, m \simeq 0^-)$  con  $P_3(m = -r - 1, -(\sqrt{3} + 1)/2 < m < 0)$ .

Por tanto los criterios dados en el capítulo anterior para explicar la energía oscura deben satisfacer  $m > 0$  y ésto, está de acuerdo con los argumentos dados en el presente capítulo.

### 5.3. Algunos Modelos Específicos

En esta sección se consideran algunos modelos  $f(R)$  para los cuales se puede escribir explícitamente  $m$  como función de  $r$  y se estudiará la posibilidad de obtener época de dominio de materia seguida por expansión acelerada.

■

$$f(R) = R - 2\Lambda$$

Hasta el momento este modelo ha sido el más acertado para la explicación de la expansión acelerada del universo [7, 8, 9] para dicho modelo se tiene que:

$$m(r) = 0 \tag{5.21}$$

En dicha función se observa que  $m(r)$  es netamente nula y conecta el punto  $(-1, 0)$  con el punto  $P_1$  en  $(-2, 0)$  a travez de una línea horizontal, [9, 17], por lo tanto se puede decir que la cantidad  $m$  caracteriza la desviación en la dinámica de un modelo con respecto a  $\Lambda$ CDM.

■

$$f(R) = R + \alpha R^{-n}$$

Este modelo es propuesto para explicar la expansión acelerada [22, 15]. para dicho modelo se tiene que:

$$m = -\frac{n(r+1)}{r} \tag{5.22}$$

La curva  $m(r)$  se reduce a un sistema bidimensional. Con la condición  $m(r = -1) = 0$  se satisface entonces  $n = -1$ , es decir se reduce al caso de Relatividad General. Ahora para que el término (4.29) se satisfaga se necesita que  $\alpha < 0$  para  $n > 0$  y  $\alpha > 0$  para  $n < 0$ .

A partir de los autovalores para el punto  $P_5$ , la época de materia es una espiral estable para  $n < -1$  de modo que la solución no abandona dicha era para entrar en expansión acelerada.

Por otro lado en el punto  $P_2$  hay estabilidad en la región  $-1 < n < -3/4$ , y muestra una divergencia positiva en el límite  $m \rightarrow 0^+$ , lo que significa que el punto se vuelve repulsivo para  $m$  cercanos a  $0^+$ ; por lo cual se concluye que el punto silla  $P_6$  se conecta al punto  $P_2$  o a  $P_3$ . Al satisfacer la condición necesaria para la existencia del punto materia en  $P_6$  cuando  $(r = -1)$ , las soluciones que se obtiene para  $m$  son  $m_a = 0$  y  $m_b = -(n+1)$ , en tal caso se tiene que:

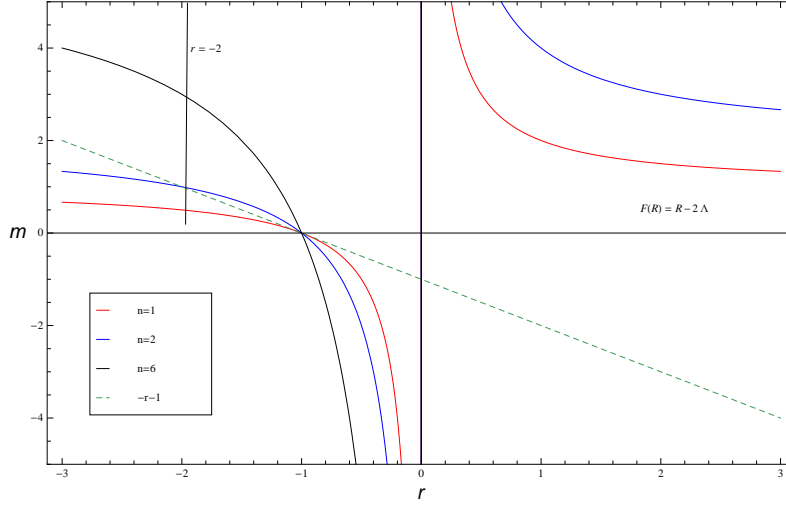


Figura 5: Diagrama  $(r, m)$  para la función  $f(R) = R + \alpha R^{-n}$

$$P_{6a} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \Omega_m = 1, \quad \omega_{eff} = 0 \quad (5.23a)$$

$$P_{6b} = \left(-\frac{3(n+1)}{n}, \frac{4n+3}{2n^2}, \frac{4n+3}{2n}\right), \quad \Omega_m = \frac{8n^2 + 13n + 3}{2n^2}, \quad (5.23b)$$

$$\omega_{eff} = -1 - \frac{1}{n}$$

esta familia de modelos se puede dividir en tres casos:

1.  $n < -1$  cuyo caso implica que  $m' = n/r^2 < -11$  y por lo tanto la época de materia alrededor de  $m \approx 0^+$  es estable. El caso  $n = -2$  corresponde al modelo de Starobinsky [22].
2.  $-1 < n < 1$  en el cual la condición  $r = -1$  se satisface con  $R \rightarrow \infty$ , se puede ver que

$$m = \frac{n(n+1)\alpha R^{-n-1}}{(1 - n\alpha R^{-n-1})} \quad (5.24)$$

se aproxima a cero si  $\alpha = 0$ . Para este caso existen oscilaciones alrededor de la época de materia y un punto final de de Sitter  $P_1$ .

3.  $n > 1$  en el cual el punto  $P_3$  es estable para un valor  $\omega_{eff}$  diferente del valor de Phantom, debido a la condición  $m < -1$ . Si  $\alpha > 0$ ,  $m$  se aproxima a cero por la derecha, entonces existen oscilaciones alrededor de la época de materia, pero ocasiona que el punto  $P_1$  sea inestable. En la figura (5) se

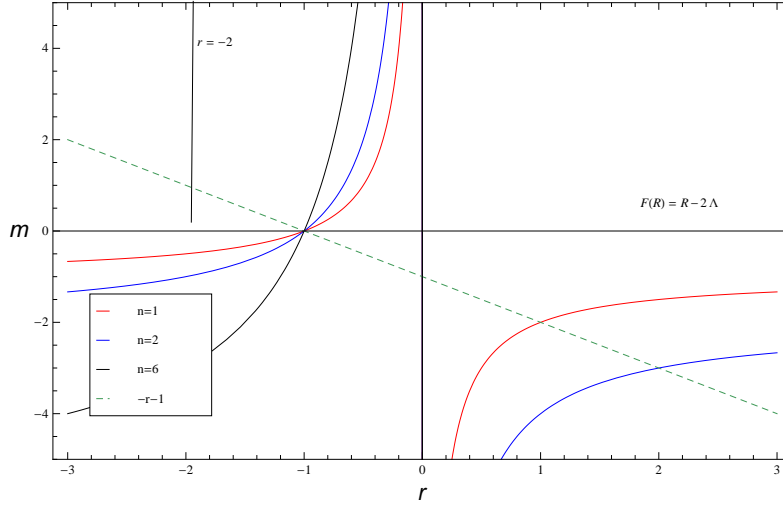


Figura 6: Diagrama  $(r, m)$  para la función  $f(R) = R + \alpha R^n$

muestra el plano  $(r, m)$  para el modelo  $F(R)$  con  $n = 1, 2, 6$  donde se aprecia claramente que  $n = 1, 6$  no son modelo viable, pues no conecta el punto  $P_6$  de la época de materia con el de expansión acelerada.

Si se considera el caso  $n < 0$  se obtiene un punto de conexión entre la época de materia y la expansión acelerada para  $n = -2$ , como se puede ver en la figura (6) denominada modelo de Starobinsky [22].

■

$$f(R) = R^p e^{qR}$$

Para este modelo  $m$  está dado como:

$$m(r) = -r + \frac{p}{r} \quad (5.25)$$

En el caso de un exponencial puro ( $p = 0$ ) se tiene que  $m = -r$  de modo que  $m \rightarrow 0$  cuando  $x_2 \rightarrow 0$  para lo cual  $P_2$  existe mientras que  $P_5$  no.

Por otro lado  $m = 0$  cuando  $r = \pm\sqrt{p}$  lo que implica que para la condición (5.12)  $p = 1$ . Sin embargo puesto que  $m'(r = -1) = -2 < -1$  el punto  $P_5$  es un espiral estable cuando  $m > 0$ .

En el límite cuando  $m \rightarrow 0^+$  el punto  $P_3$  no puede ser usado para la expansión, implicando que  $P_5$  sea estable. Por otra parte, cuando  $m(r = -2) = 3/2$  para  $p = 1$  el punto de de Sitter no es estable entonces para estos modelos no hay

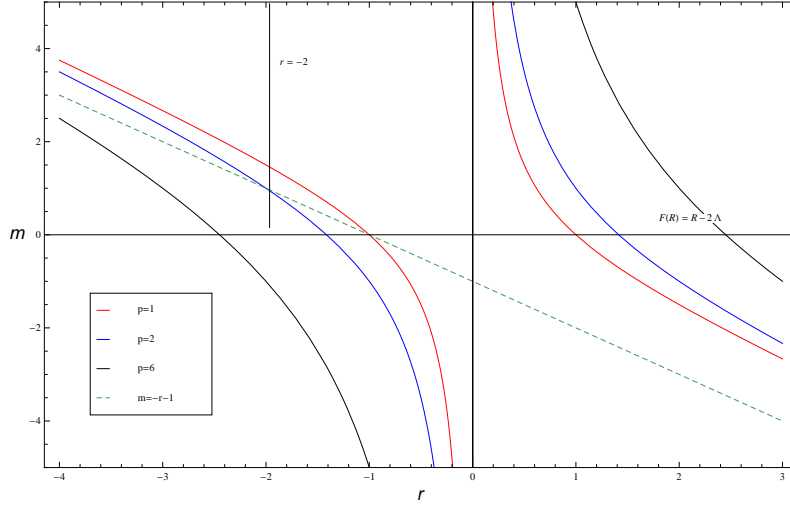


Figura 7: Diagrama  $(r, m)$  para la función  $f(R) = R^p e^{qR}$

secuencia entre la época de dominio de materia y expansión acelerada, para  $p = 1$  en la figura (7) se muestra el plano  $(r, m)$  para la función  $f(R) = R^p e^{qR}$ .

■

$$f(R) = R^p (\ln \alpha R)^q$$

Para este modelo se tiene que:

$$m(r) = \frac{p^2 + 2pr - r(q - r + qr)}{qr} \quad (5.26)$$

como para que  $m(r = -1) = -(p - 1)^2/q$ , la época de materia existe sólo para  $p = 1$ . Cuando  $p = 1$  se tiene para  $m(r = -2) = 1 - 1/2q$  lo que significa que el punto  $P_1$  es estable para  $q > 0$  pero no para  $q < 0$ .

La derivada  $m'(r)$  es

$$m'(r) = -1 + \frac{r^2 - 1}{qr^2} \quad (5.27)$$

como  $m'(r = -1) = -1$ , el punto  $P_1$  es estable. similarmente el punto  $P_6$  es estable para  $q > 0$ . Esto implica que la curva  $m(r)$  no atraviesa un estado Phantom, de modo que las únicas trayectorias posibles son desde el punto de materia  $P_5$  hasta el punto de Sitter  $P_1$ . En la figura (8) se muestra el plano  $(r, m)$  para  $f(R) = R^p (\ln \alpha R)^q$ .

Se puede entonces concluir que una función  $f(R)$  puede ser cosmológicamente viable:

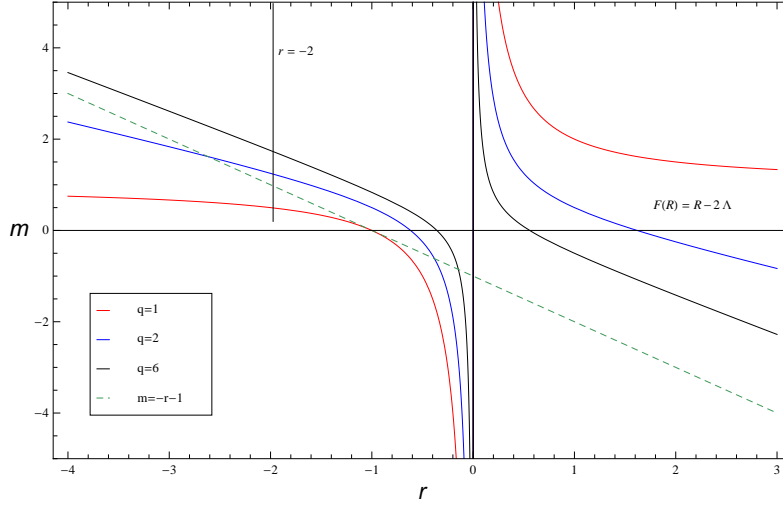


Figura 8: Diagrama  $(r, m)$  para la función  $f(R) = R^p(\ln a R)^q$

1. Cuando tiene una época estándar de dominio de materia sólo si satisface las condiciones

$$m(r) \approx 0^+, \quad m'(r) > -1 \quad (5.28)$$

cuando  $r \approx -1$

2. Cuando la época de materia es seguida por una aceleración tipo de Sitter  $\omega_{eff} = -1$  sólo si:

$$0 < m(r) \leq 1 \quad (5.29a)$$

en  $r = -1$  o

$$m(r) = -r - 1 \longrightarrow \pm\infty \quad (5.29b)$$

3. Cuando la época de materia es seguida por un atractor con  $\omega_{eff} > -1$  sólo si  $m = -r - 1$  y se cumple simultaneamente

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} < m(r) \leq 1 \quad (5.30)$$

y

$$m'(r) < -1 \quad (5.31)$$

## 5.4. Modelo Propuesto para la Energía Oscura

Para el modelo propuesto por el profesor Norberto Granda de la forma:

$$F(R) = R + \frac{\alpha R + \beta}{\gamma R + \delta} \quad (5.32)$$

se le aplicarán los tratamientos para los modelos  $F(R)$  dados en los capítulos anteriores. Para comenzar, la acción (4.4) queda

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + \frac{\alpha R + \beta}{\gamma R + \delta} + \mathcal{L}_{materia} \right) \quad (5.33)$$

para la función (5.32) se tiene que la relación (4.15) toma la forma

$$0 = \gamma^2 R^3 + 2\gamma(\delta - \alpha)R^2 + (\delta^2 - 3\beta\gamma - \alpha\delta)R - 2\beta\delta \quad (5.34)$$

A continuación considerando las restricciones dadas en (4.27), (4.28), (4.29), (4.30) y (4.31) se obtiene lo siguiente:

■

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -\Lambda_i \quad (5.35)$$

es decir que para un universo temprano la relación entre  $\alpha$  y  $\gamma$  debe estar en el orden de los  $(10^{28}eV)^2$  y se evidencia que  $\alpha$  es negativa.

■

$$f'(R) = -\frac{(\gamma\beta - \alpha\delta)}{(\delta + \gamma R)^2} \quad (5.36)$$

$$-\frac{(\gamma\beta - \alpha\delta)}{(\delta + \gamma R)^2} > -1 \quad (5.37)$$

$$\frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)2\gamma}{(\delta + \gamma R)^3} > 0 \quad (5.38)$$

■

$$\frac{\beta}{\delta} = 0 \quad (5.39)$$

Para el sistema dinámico se usan las definiciones (5.6a) y (5.6b)

Valor Constante	$f(R)$	$m$
caso 1: $\alpha = 0$	$R + \frac{\beta}{\gamma R + \delta}$	$\frac{2\beta\gamma^2 R}{(\delta + \gamma R)^3 \left(1 - \frac{\beta\gamma}{(\delta + \gamma R)^2}\right)}$
caso 2: $\beta = 0$	$R + \frac{\alpha R}{\gamma R + \delta}$	$\frac{R \left( \frac{2\alpha\gamma^2 R}{(\delta + \gamma R)^3} - \frac{2\alpha\gamma}{(\delta + \gamma R)^2} \right)}{\frac{\alpha}{\delta + \gamma R} - \frac{\alpha\gamma R}{(\delta + \gamma R)^2} + 1}$

Tabla 5.4: Valores para  $f(R)$  y  $m$  dependiente de la constante.

- Caso 1  $\alpha = 0$

$$m = \frac{2\beta\gamma^2 R}{(\delta + \gamma R)^3 \left(1 - \frac{\beta\gamma}{(\delta + \gamma R)^2}\right)} \quad (5.40)$$

y

$$r = -\frac{R \left(1 - \frac{\beta\gamma}{(\delta + \gamma R)^2}\right)}{\frac{\beta}{\delta + \gamma R} + R} \quad (5.41)$$

En este trabajo se enfatizará el siguiente caso como en [23]

- Caso 2  $\beta = 0$

$$m = \frac{R \left( \frac{2\alpha\gamma^2 R}{(\delta + \gamma R)^3} - \frac{2\alpha\gamma}{(\delta + \gamma R)^2} \right)}{\frac{\alpha}{\delta + \gamma R} - \frac{\alpha\gamma R}{(\delta + \gamma R)^2} + 1} \quad (5.42)$$

$$r = -\frac{R \left( \frac{\alpha}{\delta + \gamma R} - \frac{\alpha\gamma R}{(\delta + \gamma R)^2} + 1 \right)}{\frac{\alpha R}{\delta + \gamma R} + R} \quad (5.43)$$

obteniendo que la función  $m(r)$  es

$$m(r) = \frac{8(r+1)^2 \alpha \delta \left( \frac{\sqrt{r^2 \alpha^2 - 4(r+1)\alpha\delta - r\alpha}}{2(r+1)} - \delta \right)}{\left( \sqrt{r^2 \alpha^2 - 4(r+1)\alpha\delta} - r\alpha \right)^2 \left( \frac{\left( \sqrt{r^2 \alpha^2 - 4(r+1)\alpha\delta - r\alpha} \right)^2}{4(r+1)^2} + \alpha\delta \right)} \quad (5.44)$$

Este caso es implicación directa de (5.39) y cumple con todos los requisitos necesarios; exepctuando la condición (4.29).

La condición  $m(r = -1)$  está indeterminada pero el límite es convergente hacia cero, como se puede obsevar en la gráfica (9) es decir que el punto es estable en  $P_6$  convergentemente pero no tiende a  $P_1$  lo cual la haría acorde con el modelo  $\Lambda$ CDM [9], para la obtención de de Sitter. Aun así para la época de dominio de materia  $m \approx 0^+$  cuando  $r = -1$  y  $m'(r) \approx 0$ . Como fue visto en la estabilidad del punto  $P_3$ . Por lo que se puede ver en la gráfica (9) que cumple positivamente dicha condición. Para lo cual, el modelo propuesto es viable cosmológicamente conectando la época de materia con la expansión acelerada.

Aprovechándose que  $\beta = 0$  la condición (5.35) y la relación (5.34) quedan expresada como:



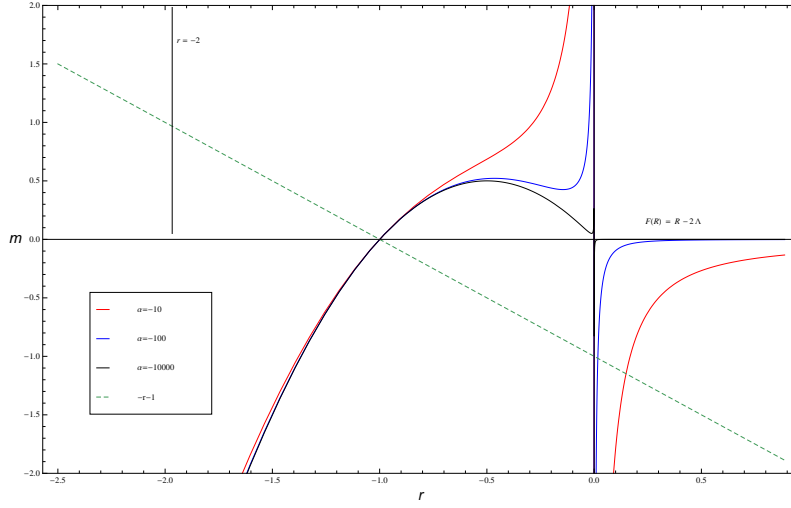


Figura 9: Diagrama  $(r, m)$  para la función  $f(R) = R + \frac{\alpha R}{\gamma R + \delta}$

$$f'(R) = \frac{(\alpha\delta)}{(\delta + \gamma R)^2} \quad (5.45)$$

y

$$0 = R(\gamma^2 R^2 + 2\gamma(\delta - \alpha)R + (\delta^2 - \alpha\delta)) \quad (5.46)$$

de la ecuación (5.46) se obtienen 3 valores para  $R$ ;

$$R_0 = \frac{2\gamma(\alpha - \delta) \pm \sqrt{[2\gamma(\alpha - \delta)]^2 + 4\gamma^2(\alpha\delta - \delta^2)}}{2\gamma^2}, \quad R_0 = 0 \quad (5.47)$$

Donde al usar la (5.35) junto con (5.39) se obtiene

$$\frac{\alpha}{\gamma} \approx 0 \quad (5.48)$$

lo cual es consistente con los datos registrados para la constante cosmológica [15, 14, 21], la cual debe estar en el orden de los  $(10^{-33}eV)^2$  para un universo temprano. Haciendo uso de esto se puede estimar que

$$\gamma \gg \alpha$$

por tanto [20, 23]

$$\gamma \approx R_0^{-1}, \quad \alpha \approx -\Lambda_i R_0^{-1}, \quad \delta \approx 1 \quad (5.49)$$

Con lo cual se puede decir que el modelo es viable cosmológicamente ya que une  $P_3$  con  $P_6$ ; y los valores para las constantes están en el rango estimado.

# CAPÍTULO 6

## 6. Conclusiones

Como se vio a lo largo de este trabajo, las teorías de gravedad modificada  $F(R)$  son una interesante alternativa para atacar el problema actual de la expansión acelerada del universo. En el capítulo 3 se obtuvieron las ecuaciones de campo en el formalismo métrico de las teorías  $F(R)$  descartando el término de frontera en la acción modificada. Las ecuaciones de campo obtenidas muestran claramente que son de orden 4 en la métrica, y las condiciones del tensor de energía-impulso son netamente geométricas.

Aunque las teorías  $F(R)$  tienen algunos problemas en cuanto a las pruebas en el sistema solar [23] tienen pruebas a grandes escalas que la hacen ver como una posible explicación a la actual expansión acelerada.

Las funciones  $f(R)$  cosmológicamente viables son aquellas que cumplen lo siguiente:

1. Cuando tiene una época estándar de dominio de materia sólo si satisface las condiciones (5.28) cuando  $r \approx -1$ .
2. Cuando la época de materia es seguida por una aceleración tipo de Sitter  $\omega_{eff} = -1$  sólo si se cumplen las relaciones (5.29a) en  $r = -1$  o (5.29b).
3. Cuando la época de materia es seguida por un atractor con  $\omega_{eff} > -1$  sólo si  $m = -r - 1$  y se cumple simultaneamente (5.30) y (5.31).

El modelo tratado conecta la expansión acelerada con la época de materia uniendo  $P_6$  con  $P_3$ , lo cual hace que dicho  $F(R)$  sea relevante y pueda ser propuesto como modelo viable para la energía oscura.

# APÉNDICES

## A. Evaluación del Término $g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - g^{\sigma\mu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)$

La variación de  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$  es

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}[\partial_\mu g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}[\partial_\mu \delta g_{\gamma\nu} + \partial_\nu \delta g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma \delta g_{\mu\nu}]. \quad (\text{A-1})$$

Escribiendo las derivadas parciales de las variaciones de la métrica con la expresión de la derivada covariante

$$\nabla_\kappa \delta g_{\mu\nu} = \partial_\kappa \delta g_{\mu\nu} - \Gamma_{\kappa\mu}^\alpha \delta g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\kappa\nu}^\alpha \delta g_{\mu\alpha} \quad (\text{A-2})$$

y haciendo uso de que la variedad es libre de torsión y que el símbolo de Christoffel es simétrico, satisfaciendo que la propiedad de Cartan es nula, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = & \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}[\partial_\mu g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}] + \\ & \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}[\nabla_\mu \delta g_{\gamma\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\gamma\mu} - \nabla_\gamma \delta g_{\mu\nu}] + g^{\sigma\gamma}\Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta g_{\gamma\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

Ahora, usando la propiedad (2.12a) en el tercer término e igualando con el primero

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = & \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}[\partial_\mu g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}[\nabla_\mu \delta g_{\gamma\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\gamma\mu} - \nabla_\gamma \delta g_{\mu\nu}] - \\ & g^{\sigma\gamma}\Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta g_{\gamma\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A-4a})$$

$$= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\alpha}g_{\lambda\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}[\nabla_\mu \delta g_{\gamma\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\gamma\mu} - \nabla_\gamma \delta g_{\mu\nu}] - \delta_\kappa^\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta g^{\eta\kappa} g_{\lambda\eta} \quad (\text{A-4b})$$

se puede observar que son de la misma naturaleza por lo cual se anulan, teniendo entonces como resultado que la variación del símbolo de Christoffel está dada por:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}[\nabla_{\mu}\delta g_{\gamma\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\gamma\mu} - \nabla_{\gamma}\delta g_{\mu\nu}]. \quad (\text{A-5})$$

Por analogía, el término  $\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}$  queda escrito como

$$\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\gamma}[\nabla_{\mu}\delta g_{\gamma\lambda}] \quad (\text{A-6})$$

Sin embargo, es conveniente expresar el resultado previo en función de las variaciones  $\delta g^{\mu\nu}$ . De nuevo, usando (2.12a), se tiene

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= -\left\{\frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}[\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha}g_{\gamma\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_{\nu}g_{\gamma\alpha}g_{\mu\beta}\delta g^{\alpha\beta} - \nabla_{\gamma}g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\right\} \\ &= -\left\{\frac{1}{2}[\nabla_{\mu}g^{\sigma\gamma}g_{\nu\alpha}g_{\gamma\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_{\nu}g^{\sigma\gamma}g_{\gamma\alpha}g_{\mu\beta}\delta g^{\alpha\beta} - \nabla_{\gamma}g^{\sigma\gamma}g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\right\} \\ &= -\left\{\frac{1}{2}[\nabla_{\mu}\delta_{\beta}^{\sigma}g_{\nu\alpha}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_{\nu}\delta_{\beta}^{\sigma}g_{\mu\alpha}\delta g^{\alpha\beta} - \nabla^{\sigma}g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\right\} \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= -\left\{\frac{1}{2}[\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha}\delta g^{\alpha\sigma} + \nabla_{\nu}g_{\mu\alpha}\delta g^{\alpha\sigma} - \nabla^{\sigma}g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\right\}. \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

De forma análoga,

$$\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = -\left\{\frac{1}{2}[\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\right\}. \quad (\text{A-8})$$

Ahora se calcula  $g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) - g^{\sigma\mu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda})$

$$\begin{aligned} &= -\{g^{\mu\nu}\frac{1}{2}[\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha}\delta g^{\alpha\sigma} + \nabla_{\nu}g_{\mu\alpha}\delta g^{\alpha\sigma} - \nabla^{\sigma}g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\} + g^{\sigma\mu}\left\{\frac{1}{2}[\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\right\} \\ &= -\left\{\frac{1}{2}[\nabla_{\mu}g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}\delta g^{\alpha\sigma} + \nabla_{\nu}g^{\mu\nu}g_{\mu\alpha}\delta g^{\alpha\sigma} - \nabla^{\sigma}g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\right\} + \left\{\frac{1}{2}[\nabla_{\mu}g^{\sigma\mu}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\right\} \\ &= -\left\{\frac{1}{2}[\nabla_{\mu}\delta_{\alpha}^{\mu}\delta g^{\alpha\sigma} + \nabla_{\nu}\delta_{\nu}^{\alpha}\delta g^{\alpha\sigma} - \nabla^{\sigma}\delta_{\alpha}^{\mu}g_{\mu\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\right\} + \left\{\frac{1}{2}[\nabla^{\sigma}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\right\} \\ &= -\left\{\frac{1}{2}[\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\sigma} + \nabla_{\nu}\delta g^{\nu\sigma} - \nabla^{\sigma}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\right\} + \left\{\frac{1}{2}[\nabla^{\sigma}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}]\right\}; \end{aligned}$$

como los dos primeros y los dos últimos términos son de la misma naturaleza, se obtiene que

$$g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) - g^{\sigma\mu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}) = -\{\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\sigma}\} + \{\nabla^{\sigma}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\} \quad (\text{A-9})$$

## B. Descripción de los Términos $M_\tau$ y $N^\sigma$

Al calcular el tensor de energía-impulso, para el formalismo métrico se definieron dos términos denominados por  $M_\tau$  y  $N^\sigma$ . Tomando la derivada covariante en  $M_\tau$ , se tiene

$$\begin{aligned}\nabla^\tau M_\tau &= \nabla^\tau [F'(R)g_{\mu\nu}\nabla_\tau(\delta g^{\mu\nu})] - \nabla^\tau [\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\nabla_\tau(F'(R))] \\ &= \nabla^\tau [F'(R)]\nabla_\tau(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) + F'(R)\nabla^\tau\nabla_\tau[g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu})] \\ &\quad - \nabla^\tau[\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}]\nabla_\tau(F'(R)) - \nabla^\tau\nabla_\tau(F'(R))[\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}] \quad (\text{B-1})\end{aligned}$$

$$\nabla^\tau M_\tau = F'(R)\nabla^\tau\nabla_\tau[g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu})] - \nabla^\tau\nabla_\tau(F'(R))[\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}]; \quad (\text{B-2})$$

integrando, se obtiene

$$\begin{aligned}\int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\tau M_\tau &= \\ \int d^4x \sqrt{-g} F'(R) \nabla^\tau \nabla_\tau [g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu})] &- \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\tau \nabla_\tau (F'(R)) [\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}]. \quad (\text{B-3})\end{aligned}$$

Usando ahora el teorema de Gauss-Stokes, la integral se puede escribir como

$$\oint d^3y \sqrt{|h|} n^\tau M_\tau = \int d^4x \sqrt{-g} F'(R) \nabla^\tau \nabla_\tau [g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu})] - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\tau \nabla_\tau (F'(R)) [\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}], \quad (\text{B-4})$$

haciendo, uso de que las integrales de línea en la frontera se anulan, se deduce entonces que:

$$\int d^4x \sqrt{-g} F'(R) \nabla^\tau \nabla_\tau [g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu})] = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\tau \nabla_\tau (F'(R)) [\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}]. \quad (\text{B-5})$$

De igual forma, para el término  $N^\sigma$  se toma la derivada covariante

$$\nabla_\sigma N^\sigma = F'(R) \nabla_\sigma \nabla_\gamma (\delta g^{\gamma\sigma}) - \delta g^{\sigma\gamma} \nabla_\sigma \nabla_\gamma (F'(R)); \quad (\text{B-6})$$

por último integrando y usando el teorema de Gauss-Stokes, se llega a

$$\int d^4x \sqrt{-g} F'(R) \nabla_\sigma \nabla_\gamma (\delta g^{\gamma\sigma}) = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\gamma} \nabla_\sigma \nabla_\gamma (F'(R)) \quad (\text{B-7})$$

## C. Estabilidad en el Sistema Dinámico

Para determinar la estabilidad de los puntos dinámicos según [8, 17] se considera un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas por dos variables<sup>7</sup>  $x(t)$  y  $y(t)$  de la forma:

$$\dot{x} = f(x, y, t) \quad \dot{y} = g(x, y, t). \quad (\text{C-1})$$

Por tanto un punto crítico  $(x_c, y_c)$  es un punto tal que:

$$(f, g)|_{x_c, y_c} = 0. \quad (\text{C-2})$$

Para estudiar dicha estabilidad, se consideran pequeñas oscilaciones  $\delta x$  y  $\delta y$  alrededor de los puntos críticos

$$x = x_c + \delta x \quad y = y_c + \delta y$$

donde

$$d(\delta x) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad d(\delta y) = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy, \quad (\text{C-3})$$

de modo que al ser reemplazado en el sistema dinámico se obtiene

$$\frac{d}{d\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}, \quad (\text{C-4})$$

cuya matriz

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{C-5})$$

posee dos autovalores  $j_1$  y  $j_2$  cuyas soluciones son

$$\delta x = C_1 e^{j_1 \mathcal{N}} + C_2 e^{j_2 \mathcal{N}}, \quad (\text{C-6a})$$

$$\delta y = C_3 e^{j_1 \mathcal{N}} + C_4 e^{j_2 \mathcal{N}}, \quad (\text{C-6b})$$

siendo  $C_i$  constantes de integración; entonces la estabilidad depende de la naturaleza de los autovalores:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Punto estable:} & j_1 < 0 \text{ y } j_2 < 0 \\ \text{Punto inestable:} & (j_1 > 0 \text{ y } j_2 > 0) \\ \text{Punto de silla:} & (j_1 < 0 \text{ y } j_2 > 0) \text{ o } (j_1 > 0 \text{ y } j_2 < 0) \\ \text{Espiral estable:} & |\mathcal{J}| < 0 \text{ y las partes reales de } j_1 \text{ y } j_2 \text{ son negativas.} \end{array} \right.$$

---

<sup>7</sup>Se dice autónomo cuando  $f, g$  no dependen explícitamente del tiempo

Un punto fijo es un atractor cuando es estable y espiral estable, pero no para los otros casos. De esta manera se construye la matriz  $\mathcal{J}$  a partir de las derivadas en el sistema dinámico para cada una de las funciones  $g_i$  con respecto a cada una de las variables  $x_i$  y por último se determinan los valores propios de la matriz  $\mathcal{J}$  a partir de la relación

$$\det(\mathcal{J}|_{x_{1c}, x_{2c}, x_{3c}}) - \lambda \mathcal{I} = 0 \quad (\text{C-7})$$

donde  $\mathcal{I}$  es la matriz identidad. la estabilidad de los puntos críticos depende entonces, de los signos en los autovalores de la matriz (5.9) evaluados en los puntos críticos.

## Bibliografía

- [1] S. Perlmutter, *et al.*, *Measurements of  $\Omega_\Lambda$  and  $\Omega_m$  from 42 High-Redshift Supernovae*, arxiv:9812133v1 [astro-ph], 1998
- [2] A. Riess, *et al.*, *Observational Evidence From Supernovae For An Accelerating Universe And A Cosmological Constant*, hetdex.org, 1998
- [3] Wood-Vasey, *et al.*, *Observational constraints on the nature of dark energy: first cosmological results from the essence supernova survey*, The Astrophysical Journal, 666, 2007.
- [4] R. A. Knop, *et al.*, *New Constraints on  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$ , and  $\omega$  from an Independent Set of Eleven High-Redshift Supernovae Observed with HST*, arxiv: 030968v1 [astro-ph], 2003.
- [5] E. Komatsu, *et al.*, *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*, arXiv:0803.0547v2 [astro-ph], 2009.
- [6] The Planck Collaboration, *The Scientific Programme of Planck*, arXiv:0604069 [astro-ph], 2006.
- [7] L Papantonopoulos (Ed.) *The Invisible Universe: Dark Matter and Dark Energy*, Lect. Notes Phys. 720 ( Springer, Berlin Heidelberg 2007), 2007.
- [8] Edmund J. Copeland, M. Sami, Shinji Tsujikawa, *Dynamics of dark energy*, arxiv:063057v3 [hep-th], 2006.
- [9] P. J. E. Peebles, Bharat Ratra, *The Cosmological Constant and Dark Energy*, arxiv:0207347v2 [astro-ph], 2002
- [10] Ying Shao, Yuan-Xiong Gui, Wei Wang, *Parametrization of Tachyon Field*, arxiv:0703112v1 [gr-qc], 2007.
- [11] Nobuo Sato, *Campo del Tachyon como Fuente de Energía Oscura*, tesis de grado, universidad del valle, 2007.
- [12] Pedro F. Gonzales Díaz, *Unified Model for Dark Energy*, arxiv:0212414v2 [astro-ph], 2003.
- [13] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov *Can  $f(R)$ -Gravity Be a Viable Model: The Universal Unification Scenario for Inflation, Dark Energy and Dark Matter*, arxiv: 0801.4843v1 [astro-ph], 2008.
- [14] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov *Dark Energy, Inflation and Dark Matter from Modified  $f(R)$  gravity*, arxiv: 0807.0685v1 [hep-th], 2008.



- [15] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, *Unified Cosmic History in Modified Gravity: from  $F(R)$  Theory to Lorentz Non-invariant Models*, arxiv:1011.0544v4 [gr-qc], 2011.
- [16] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [17] L. Amendola, Sh. Tsujikawa, *Phantom Crossing, Equation-of-State Singularities and Local Gravity Constraints in  $f(R)$  Models*, arxiv:0705.0396v3 [astro-ph], 2007
- [18] Thomas P. Sotiriou,  *$f(R)$  Theories of Gravity*, arxiv:0805.1726v4 [gr-qc], 2012.
- [19] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, *Modified  $f(R)$  gravity unifying  $R^m$  Inflation with  $\Lambda$ CDM Epoch*, arxiv:0710.1738v2 [hep-th], 2007.
- [20] Andrei V. Frolov, *A Singular Problem with  $f(R)$  Dark Energy*, arxiv:0803.2500v2 [astro-ph], 2008.
- [21] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, *Modified gravity as Realistic Candidate for Dark Energy, Inflation and Dark Matter*, arxiv:0810.1557v1 [hep-th], 2008.
- [22] A. Starobinsky, *Disappearing cosmological constant in  $f(R)$  gravity*, arxiv:0706.2041v2 [astro, ph], 2007.
- [23] Wayne Hu, Ignacy Sawicki, *Models of  $F(R)$  Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests*, arxiv:0705.1158v1 [astro-ph], 2007.

*“Quien busca la verdad, sea o no consciente de ello, busca a Dios”* Edith Stein